

# AKUSTICKÉ LISTY

České akustické společnosti

ročník 10, číslo 4

prosinec 2004

## Obsah

<b>Pozvánka na valnou hromadu</b>	<b>3</b>
<b>Bude porovnání výpočetních programů na dopravní hluk nebo ne?!</b> <i>Jan Stěnička</i>	<b>3</b>
<b>Pozvánka na WORKSHOP 2005</b> <i>Libor Husník</i>	<b>3</b>
<b>Modelování stojatých zvukových vln konečných amplitud pomocí konvekčně-difuzních rovnic</b> Finite-amplitude acoustic standing waves modeling using convection-diffusion equations <i>Milan Červénka</i>	<b>5</b>
<b>FPGA implementace LMS a N-LMS algoritmu pro potlačení akustického echa</b> FPGA Implementation of LMS and N-LMS Algorithm for Acoustic Echo Cancellor <i>Tomáš Mazanec a Marek Brothánek</i>	<b>9</b>
<b>Příspěvek ke způsobu určení optimální pracovní frekvence interferometru pro ultrazvukovou detekci termálních značek</b> A contribution to determination of optimal operational frequency of interferometr for thermal mark flowmeters <i>Jaroslav Plocek</i>	<b>15</b>
<b>Aktivní potlačování harmonických ve válcovém akustickém rezonátoru</b> Active attenuation of harmonics in the cylindrical acoustic resonator <i>Petr Koníček</i>	<b>19</b>
<b>Nelineární stojaté vlny v elastických rezonátorech</b> Nonlinear standing waves in elastic resonators <i>Michal Bednařík</i>	<b>23</b>



Rada České akustické společnosti svolává ve smyslu stanov

**VALNOU HROMADU,**

kteřá se bude konat ve čtvrtek 27. ledna 2005 na fakultě elektrotechnické ČVUT, Technická 2, Praha 6 – Dejvice.

**Rámcový program:**

10:00 – 11:45 Jednání v odborných skupinách. Rozpis místností pro jednání v odborných skupinách bude vyvěšen ve vstupním prostoru fakulty a na dveřích sekretariátu společnosti, dveře č. 47

12:00 – 13:00 Prezentace

13:15 – 16:00 Plenární zasedání, místnost č. 337

**Důležité upozornění:** Člen společnosti, který se nebude moci valné hromady osobně zúčastnit, pověří jiného člena, aby jej zastupoval. Jeden člen společnosti může zastupovat nejvýše tři členy. Formulář pověření je součástí tohoto čísla Akustických listů.

---

**Bude porovnání výpočetních programů na dopravní hluk nebo ne?!**

Na základě zvýšené propagace a posunutí termínu se do porovnání přihlásilo 5 fyzických osob a 4 právnické organizace se svými metodami a programy. Tři organizace se přihlásily za šířitele softwaru: Soundplan, Mithra a Predictor/Lima. Porovnání z hlediska statistiky bylo tedy možné a bylo odstartováno. Zúčastnění byli obesláni zadáním v digitální i písemné formě. Bohužel řešení vypracovali a zaslali k statistickému zpracování jen dva přihlášení. Zpracovatelské pracoviště pověřené Českou akustickou společností, tj. Národní referenční laboratoř v Ústí nad Orlicí, z tohoto důvodu nemůže provést řádné statistické vyhodnocení. Vyzýváme proto přihlášené, kteří již zároveň zaplatili účastnický poplatek, aby řešení co nejdříve NRL zaslali. Pokud tak neučiní do 31. 1. 2005, budeme nuceni porovnání ukončit a účastnický poplatek vrátíme jen těm, kteří řešení zaslali SWQ. Ostatní poplatky propadnou ve prospěch ČsAS.

Jan Stěnička

zodpovědný pracovník pro porovnání  
výpočetních metod pro dopravní hluk

**Pozvánka na WORKSHOP 2005**

Dovolujeme si Vás informovat, že České vysoké učení technické v Praze pořádá ve dnech **7. až 11. února 2005** v prostorách fakulty stavební a fakulty architektury, Thákurova 7, Praha 6, odborný seminář **WORKSHOP 2005**, kde se formou posterů představí výsledky výzkumné činnosti vědeckých pracovníků školy v širokém spektru technických oborů. Zájemci z praxe zde mohou získat nejnovější informace a navázat přímé kontakty. Součástí semináře bude pracovní jednání – vyzvaná vystoupení, příspěvky z pléna a následná diskuse – zaměřené na aktuální problémy vědy, výzkumu a vývoje. Bližší informace jsou uveřejněny na webové adrese <http://workshop.cvut.cz>.

Za organizační výbor  
Libor Husník

**Oprava**

V minulém čísle Akustických listů byl omylem uveden chybný název článku autora Milana Krňáka. Správný název měl být *Počátky měření akustických obkladů v Čechách*. V PDF podobě na webové adrese <http://www.czakustika.cz> je uvedena opravená verze. Za politováníhodnou chybu, která se stane „maximálně jednou za deset let“, se omlouváme.  
redakce



# Modelování stojatých zvukových vln konečných amplitud pomocí konvekčně-difuzních rovnic

Milan Červenka

ČVUT–FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6, e-mail: cervenm3@fel.cvut.cz

The paper deals with the problems of finite-amplitude standing waves in acoustical resonators of cylindrical and spherical shape filled with a viscous and thermal conducting gas. A system of two coupled one-dimensional nonlinear partial differential equations in conservative form is derived from the fundamental equations of gasdynamics. A high resolution central difference scheme is used for numerical integration of the model equations to study properties and behaviour of standing acoustic waves of extreme amplitudes.

## 1. Úvod

Účelem tohoto článku je formulování soustavy modelových rovnic v konzervativním tvaru pro popis zvukových vln konečných amplitud v akustických rezonátorech. Důvodem je, že pro tento typ rovnic je vyvinuto množství numerických algoritmů (diferenčních schémat), které lze používat k numerické integraci bez ohledu na vnitřní strukturu rovnic jako tzv. black-box solver.

V jednorozměrném případě má konvekčně-difuzní rovnice (soustava rovnic) tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}[\mathbf{u}(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Q} \left[ \mathbf{u}(x, t), \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(x, t) \right], \quad (1)$$

kde  $\mathbf{u}$  je  $N$ -rozměrný vektor hledaných veličin,  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  je (nelineární) konvekční tok a  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \partial \mathbf{u} / \partial x)$  je disipační tok.

Nalezené rovnice jsou řešeny pro jednorozměrný případ rovinných, válcových a kulových vln.

## 2. Rovnice v konzervativním tvaru

Zvukové pole ve viskózní a tepelně vodivé tekutině je popsáno pomocí základních rovnic mechaniky tekutin (rovnice kontinuity, Navierova-Stokesova pohybová rovnice), viz např. [1], [2], [3],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (3)$$

doplňných o stavovou rovnici

$$p = p(\rho, s), \quad (4)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $\mathbf{v}$  je vektor akustické rychlosti,  $p$  je tlak,  $\mathbf{F}$  je vektor vnějších objemových sil,  $s$  je měrná entropie,  $\eta$  a  $\zeta$  jsou příčná a objemová viskozita (uvažované jako konstanty) a  $t$  je čas.

Rovnice (4) může být reprezentována stavovou rovnicí pro ideální plyn, viz např. [4], ve tvaru

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma e^{(s-s_0)/c_V}, \quad (5)$$

kde  $p_0$ ,  $\rho_0$  a  $s_0$  jsou rovnovážný tlak, hustota a měrná entropie prostředí,  $\gamma = c_p/c_V$  je poměr specifických tepel při konstantním tlaku a objemu (adiabatický exponent).

Vzhledem k tomu, že pro tekutiny neexistuje obecná stavová rovnice, bývá zvykem vztah (4) rozložit do Taylorovy řady

$$p = p_0 + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, \rho = \rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s, \rho = \rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, s = s_0} (s - s_0) + \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial s} \right)_{\rho = \rho_0, s = s_0} (\rho - \rho_0)(s - s_0) + \dots \quad (6)$$

Protože člen  $(s - s_0)$  je třetího řádu malosti, viz např. [3], [4], mohou být všechny vyšší a smíšené členy v rozvoji zanedbány a stavová rovnice pak může být ve třetím přiblížení psána ve tvaru

$$p \approx \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - \kappa \left( \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (7)$$

přičemž uvažované změny entropie jsou způsobeny tepelnou vodivostí, viz např. [3], [4]. Symbol  $\kappa$  zde reprezentuje součinitel tepelné vodivosti (je uvažován jako konstanta) a  $c_0 = \gamma p_0 / \rho_0$  je adiabatická rychlost šíření malého vzruchu.

Rovnice kontinuity (2) je již formulována v konzervativním tvaru, je tedy třeba ještě upravit rovnici Navierovu-Stokesovu (3). S využitím vektorové identity

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$$

dostáváme

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla p + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}. \quad (8)$$

Vynásobíme-li rovnici kontinuity vektorem akustické rychlosti, dostaneme po rozepsání ve složkovém tvaru vztah

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0. \quad (9)$$

Pravá strana rovnice (8) zapsaná ve složkovém tvaru může být po sečtení s předchozím vztahem upravena do tvaru

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j), \end{aligned} \quad (10)$$

kde první člen byl sloučen se třetím a druhý se čtvrtým.

Zanedbáme-li v rovnici (8) poslední člen na pravé straně (jeho velikost klesá exponenciálně od stěn, viz [2]), můžeme ji s využitím vztahu (10) psát v konzervativním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i + p \delta_{ij}) &= \\ &= F_i + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned} \quad (11)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta.

Dosazením do poslední rovnice za tlak ze vztahu (7) dostaneme konečně rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho v_j v_i + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \delta_{ij} \right] &= \\ &= F_i + b \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

kde  $b$  je koeficient difuze  $b = \zeta + 4\eta/3 + \kappa(1/c_v - 1/c_p)$ , která tvoří společně s rovnicí kontinuity (2) uzavřenou soustavu dvou 3-D modelových rovnic ve třetím přiblížení v konzervativním tvaru, pomocí níž je možné zkoumat zvuková pole konečných amplitud v plynech.

### 3. 1-D modelové rovnice pro rovinné, válcové a kulové vlny

Pro jednorozměrný popis rovinných, válcových a kulových vln nahradíme v soustavě rovnic (2), (12) diferenciální operátory divergence a gradient následujícím způsobem (viz např. [5]):

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \rightarrow \frac{1}{r^n} \frac{\partial (r^n f_r)}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial r},$$

kde  $n = 0$  pro rovinné vlny,  $n = 1$  pro válcové vlny a  $n = 2$  pro vlny kulové. Prostorová souřadnice podél rezonanční dutiny je zde reprezentována symbolem  $r$ .

Soustava modelových rovnic tedy přejde do tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v) = -\frac{n}{r} \rho v, \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho v^2 + \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \right] &= \\ &= -\frac{n}{r} \rho v^2 + b \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{n}{r} v \right), \end{aligned} \quad (13b)$$

kde  $v$  je složka akustické rychlosti podél souřadnice  $r$ . Vliv vnějších objemových sil (reprezentovaný například gravitací) je zde zanedbán. Pro porovnání výsledků může být rovnice (13b) zapsána ve druhém přiblížení ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_0 v^2 + \frac{c_0^2}{2\rho_0} (\gamma - 1) \rho^2 - c_0^2 (\gamma - 2) \rho \right] &= \\ &= -\frac{n}{r} \rho_0 v^2 + b \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{n}{r} v \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Počáteční podmínky pro soustavu (13) a prostředí v rovnovážném stavu mají tvar

$$\rho = \rho_0, \quad p = p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}, \quad v = 0$$

pro  $t = 0$  a okrajové podmínky pro dokonale tuhé stěny

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = v = 0 & \quad \text{pro } r = r_1, \\ \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad v = v_m & \quad \text{pro } r = r_2, \end{aligned}$$

kde  $v_m$  je rychlost kmitání pravého (vnějšího) okraje rezonátoru. Okrajová podmínka pro  $r_1$  je splněna i v případě, že  $r_1 = 0$  (v případě válcového a kulového rezonátoru to znamená, že nemá žádnou vnitřní stěnu), a to z důvodu symetrie.

### 4. Numerické řešení

Pro účely numerické analýzy je výhodné zavést bezrozměrné veličiny

$$\Lambda = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad M = \frac{\rho v}{\pi \rho_0 c_0}, \quad X = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \quad T = \omega t,$$

kde  $\omega$  je kmitočet buzení. Soustava (13) má při použití bezrozměrných veličin tvar

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{M}{\Omega} \right) = -\frac{nM}{\Omega X}, \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{T} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{M^2}{\Omega \Lambda} + \frac{\Lambda^\gamma}{\gamma \pi^2 \Omega} \right) &= \frac{nM^2}{\Omega X \Lambda} + \\ &+ \frac{G_{TV}}{\pi^2 \Omega^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{M}{\Lambda} \right) + \frac{nM}{X \Lambda} \right], \end{aligned} \quad (15b)$$

kde  $\Omega = \omega/\omega_0$  je bezrozměrný budící kmitočet,  $\omega_0 = \pi c_0/(r_2 - r_1)$  je první vlastní kruhový kmitočet pro rovinné vlny a  $G_{TV} = b\omega/\rho_0 c_0^2$  je koeficient popisující termoviskózní ztráty.

Soustava (15) může být zapsána ve formě nehomogenní konvekčně-difuzní rovnice (1) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \mathbf{U}(X, T) + \frac{\partial}{\partial X} \mathbf{F}[\mathbf{U}(X, T)] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \mathbf{Q} \left[ \mathbf{U}(X, T), \frac{\partial}{\partial X} \mathbf{U}(X, T) \right] + \mathbf{W}[\mathbf{U}(X, T)], \end{aligned} \quad (16)$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ M \end{bmatrix}, \quad (17a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{M}{\Omega} \\ \frac{M^2}{\Omega A} + \frac{A^\gamma}{\gamma \pi^2 \Omega} \end{bmatrix}, \quad (17b)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{G_{TV}}{\pi^2 \Omega^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{M}{A} \right) + \frac{nM}{XA} \right] \end{bmatrix}, \quad (17c)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{nM}{\Omega X} \\ -\frac{nM^2}{\Omega X A} \end{bmatrix}, \quad (17d)$$

kde  $\mathbf{U}$  je vektor hledaných veličin zvukového pole,  $\mathbf{F}$  je nelineární konvekční tok,  $\mathbf{Q}$  je difuzní (disipační) tok a  $\mathbf{W}$  reprezentuje geometrické zdroje (souvisí s formulací rovnic v křivočarých souřadnicích).

Rozměrné veličiny zvukového pole dostaneme z numerického řešení pomocí vztahů

$$\rho = \rho_0 A, \quad (18a)$$

$$v = \pi c_0 \frac{M}{A}, \quad (18b)$$

$$p = \rho_0 c_0^2 \left[ \frac{A^\gamma}{\gamma} - \frac{G_T}{\Omega X^n} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{X^n M}{A} \right) \right], \quad (18c)$$

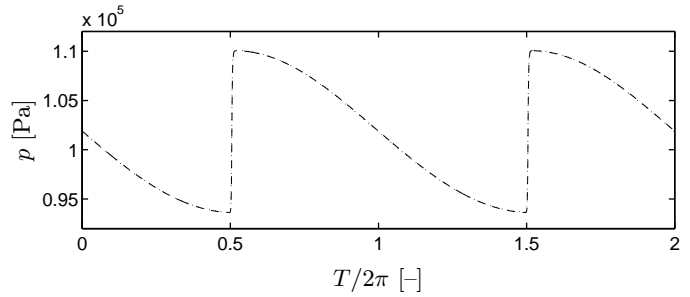
kde koeficient  $G_T = \kappa \omega (1/c_V - 1/c_p) \rho_0 c_0^2$  zahrnuje ztráty vlivem tepelné vodivosti plynu.

## 5. Numerické výsledky

Všechny numerické výpočty byly provedeny pro vzduchem vyplněné rezonátory za normálních pokojových podmínek, ve všech případech  $r_1 = 0$  cm a  $r_2 = 10$  cm (válcový a kulový rezonátor v tomto případě nemá žádnou vnitřní stěnu). Rezonátory byly ve všech případech buzeny harmonickým kmitáním stěny ve vzdálenosti  $r_2$  rychlostí  $v_m = 0,54$  m/s. Soustava modelových rovnic (16) byla řešena pomocí centrálního semidiskrétního schématu publikovaného v [6], ve všech případech byla prostorová souřadnice diskretizována na  $N = 1000$  stejných intervalů.

### 5.1. Rovinné vlny

Numerické řešení pro případ rovinných vln je uvedeno na obrázku 1. Dvě periody tlaku ( $\Omega = 1$  – rezonance) u jedné z jeho stěn získané ve druhém přiblížení jsou vyznačeny tečkovanou čarou, to samé v přiblížení třetím čarou přerušovanou. Z obrázku je patrné, že průběhy jsou identické a že pro případ rovinných vln (rezonátor konstantního průřezu) je k popisu zvukových vln dostatečná teorie ve druhém přiblížení. Z obrázku je rovněž patrný vznik pilovité rázové vlny, neboť pro všechny vyšší harmonické jsou splněny rezonanční podmínky (vyšší vlastní kmitočty jsou celočíselnými násobky kmitočtu základního).



Obrázek 1: Tlak u stěny válcového rezonátoru. Řešení získané ve druhém přiblížení (označené tečkovaně) a v přiblížení třetím (označené čárkovaně) se navzájem překrývají. V obou případech  $\Omega = 1$  (rezonance)

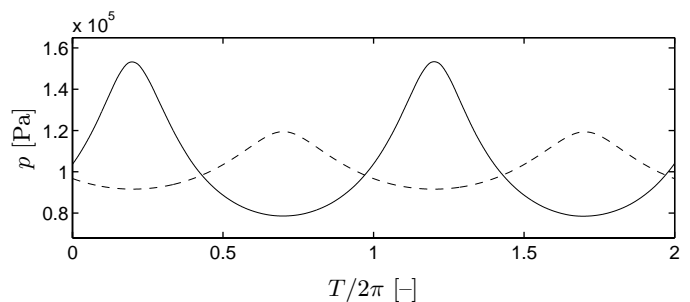
### 5.2. Válcové vlny

V případě válcového rezonátoru ( $n = 1$ ) vychází z lineární teorie, viz např. [5], vlastní kmitočty jako řešení transcendentní rovnice

$$J_1(\pi \Omega) = 0.$$

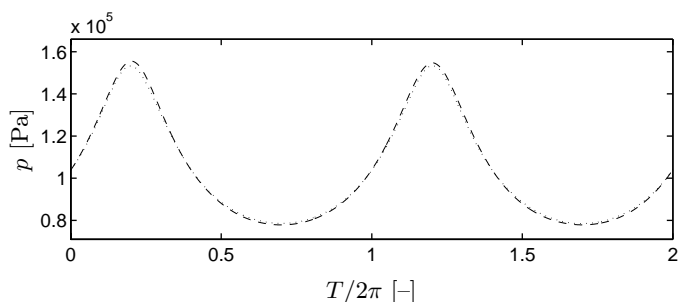
Vlastní bezrozměrné kmitočty rezonátoru jsou  $\Omega_i = 1,21967, 2,23313, 3,23832, \dots$ , z toho vyplývá, že nejsou celočíselnými násobky kmitočtu základního.

Na obrázku 2 je uveden časový průběh tlaku v centru (plnou čarou) a u stěny (přerušovanou čarou) válcového rezonátoru při rezonančním kmitočtu  $\Omega = 1,235306$ . Je patrné, že v tomto případě nedochází k vybudění pilovité rázové vlny (nejsou splněny rezonanční podmínky pro vyšší harmonické) a že rezonanční kmitočet je díky nelineárnímu jevům posunut směrem k vyšším hodnotám oproti hodnotám vyplývajícím z lineární teorie.

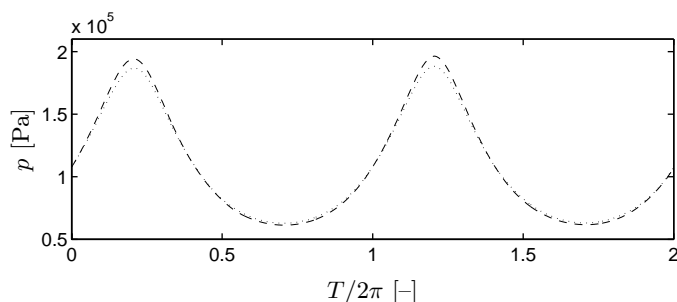


Obrázek 2: Tlak v centru válcového rezonátoru (plná čára) a u jeho stěny (přerušovaná čára). Třetí přiblížení,  $\Omega = 1,235306$  (rezonance)

Na obrázku 3 je uvedeno porovnání tlaku v centru válcového rezonátoru vypočteného ve druhém (čárkovaně) a třetím (tečkovaně) přiblížení. Ve třetím přiblížení vychází nižší amplitudy tlaku a vyšší rezonanční kmitočet než v přiblížení druhém, což je způsobeno větší nelinearitou systému.



Obrázek 3: Tlak v centru válcového rezonátoru (v rezonanci), vypočtený ve druhém (čárkovaně) a třetím (tečkovaně) přiblížení



Obrázek 5: Tlak v centru kulového rezonátoru v rezonanci, vypočtený ve druhém (čárkovaně) a třetím (tečkovaně) přiblížení

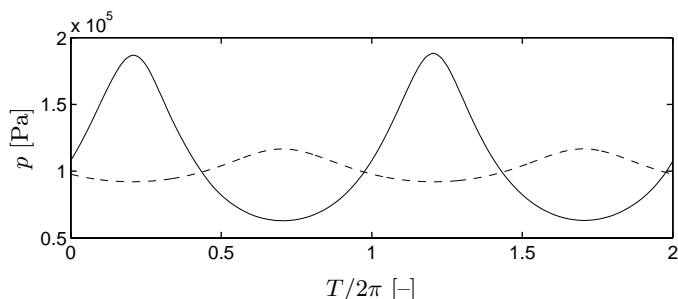
### 5.3. Kulové vlny

V případě kulového rezonátoru ( $n = 2$ ) vychází z lineární teorie vlastní kmitočty jako řešení transcendentní rovnice

$$\operatorname{tg}(\pi\Omega) = \pi\Omega,$$

viz [5]. Stejně jako v případě rezonátoru válcového, i zde jsou vlastní kmitočty neceločíselnými násobky kmitočtu prvního,  $\Omega_i = 1,43030, 2,45902, 3,47089, \dots$

Na obrázku 4 jsou vykresleny dvě periody tlaku v centru rezonátoru (plnou čarou) a na jeho okraji (přerušovanou čarou). Rezonanční kmitočet  $\Omega = 1,447033$  je opět vyšší, než předpovídá lineární teorie a kvůli nesplnění rezonančních podmínek pro vyšší harmonické nedochází ke vzniku rázové vlny.



Obrázek 4: Tlak v centru kulového rezonátoru (plná čára) a u jeho stěny (přerušovaná čára). Třetí přiblížení,  $\Omega = 1,447033$  (rezonance)

Na obrázku 5 je uvedeno porovnání tlaků v centru kulového rezonátoru ve druhém přiblížení (přerušovaně) a v přiblížení třetím (tečkovaně). Stejně jako v případě rezonátoru válcového, i zde teorie ve druhém přiblížení předpovídá vyšší amplitudy a nižší rezonanční kmitočet.

## 6. Závěr

Z numerických výsledků vyplývá, že při rezonanci válcových a kulových vln vznikají při stejném buzení zvuková pole vyšších amplitud než v případě vln rovinných a kvůli nesplnění rezonančních podmínek pro vyšší harmonické nedochází ke generování rázové vlny. Využití diferenčních

numerických schémat pro rovnice v konzervativním tvaru umožňuje řešit velice intenzivní zvuková pole i v centru symetrie rezonátorů, kde spektrální algoritmy, viz např. [5], selhávají. Použité numerické schéma vykazuje vysokou stabilitu, nízkou numerickou disipaci a disperzi a nevyžaduje zavádění přídavného tlumení pro stabilizaci výpočtu. Rovněž je velice snadno a přímočaře rozšiřitelné do více dimenzí, takže umožňuje řešit rovnice zahrnující laterální jevy ve zvukovém poli akustických rezonátorů.

## Poděkování

Tato práce byla podpořena grantem GAČR 202/04/P099 a výzkumným záměrem MSM 212 300 016. Všechny numerické výpočty byly provedeny na počítači SGI ALTIX 3700 Centra intenzivních výpočtů ČVUT.

## Reference

- [1] Blackstock, D. T.: *Fundamentals of Physical Acoustics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
- [2] Hamilton, M. F., Blackstock, D. T.: *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [3] Rudenko, O. V., Soluyan, S. I.: *Theoretical foundations of Nonlinear Acoustics*, Consultants Bureau, New York, 1977.
- [4] Makarov, S., Ochmann, M.: *Nonlinear and Thermo-viscous Phenomena in Acoustics, Part I*, ACUSTICA – acta acustica, Vol. 82, pp. 579–606, 1996.
- [5] Červenka, M.: *Akustická rezonance v poli rovinných, cylindrických a sférických vln*, Akustické listy 9(3), pp. 17–21, 2003.
- [6] Kurganov, A., Tadmor, E.: *New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations*, J. Comput. Phys, **160**, pp. 241–282, 2000.



# FPGA implementace LMS a N-LMS algoritmu pro potlačení akustického echa

Tomáš Mazanec<sup>a</sup> a Marek Brothánek<sup>b</sup>

<sup>a</sup>ÚTIA AV ČR, Pod Vodárenskou věží 4, 182 08 Praha 8, email: mazanec@utia.cas.cz

<sup>b</sup>ČVUT–FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6, email: brothan@fel.cvut.cz

This article describes implementation of echo canceller on a FPGA programmable device (Xilinx Virtex), which was done. The solution of this adaptive filtering task was aimed to least squares algorithms, especially to the LMS and normalized LMS algorithm. Used digital filters were the type of finite impulse response (FIR) in transversal structure. The FPGA implementation was created in Handel-C language of DK 2.0 system (Celoxica) which is designated to rapid prototyping flow. Real signals with echo were applied to practice the implementation.

## 1. Úvod

Cílem práce bylo implementovat metodu kompenzace echa na platformě programovatelného obvodu – Field Programmable Gate Array (FPGA). Řešení zahrnuje jak praktické využití adaptivní filtrace, tak implementaci zadané úlohy do hardwarové podoby.

K řešení úlohy kompenzace echa bylo využito metody nejmenších čtverců, resp. jedno z jejích řešení. Tím byla v našem případě LMS a N-LMS aproximace nejmenších čtverců. Adaptivní filtr založen na této aproximaci je základem implementovaného systému potlačujícího echa.

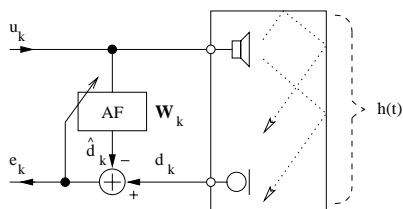
V implementaci na FPGA se předpokládalo využití výhod platformy FPGA pro aplikace zpracování signálů.

## 2. Popis systému

Potlačování echa je jednou z mnoha úloh nejčastěji řešených pomocí adaptivní filtrace. Jedná se o adaptivní číslicový filtr (AF) zapojený v úloze identifikace, který se snaží odhadnout parametry neznámého systému  $h(t)$ . Blokové schéma systému je zobrazeno na obrázku 1 a lze jej popsat rovnicí

$$d(t) = h(t) \star u(t), \quad (1)$$

kde  $h(t)$  je impulsní odezva neznámého systému,  $u(t)$  je vyslaný akustický signál,  $d(t)$  je přijatý akustický signál obsahující echo a  $\star$  značí lineární konvoluci. Úkolem AF je adaptovat své koeficienty tak, aby minimalizoval výstupní chybový signál  $e_k$ , resp. jeho energii  $\epsilon = E[e_k^2]$ , kde  $E[\cdot]$  značí střední hodnotu signálu (viz [2]). Jelikož signál  $e_k$



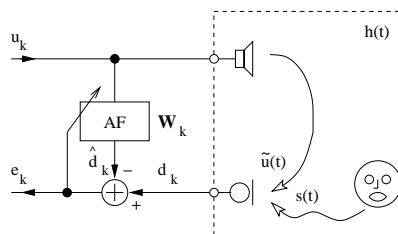
Obrázek 1: Úloha identifikace při potlačování echa

vzniká jako rozdíl mezi vstupním signálem  $d_k$  a výstupem AF – signálem  $\hat{d}_k$ , je  $e_k$  signálem s potlačeným echem.

Jednou z dalších aplikací je také potlačování echa za přítomnosti blízkého signálu. Situaci ukazuje obrázek 2. Zde se kromě akustické zpětné vazby  $\tilde{u}(t)$  ještě přidává hlas mluvčího  $s(t)$ , systém lze popsat vztahem:

$$d(t) = \tilde{u}(t) + s(t) = h(t) \star u(t) + s(t). \quad (2)$$

Taková situace modeluje např. běžné telefonování v automobilu s tzv. hands-free sadou.



Obrázek 2: Potlačování echa s blízkým signálem

Za předpokladu, že je signál mluvčího  $s(t)$  statisticky nezávislý vůči signálu echa  $\tilde{u}(t)$ , se AF snaží potlačit signál echa  $\tilde{u}(t)$  tak, jako by signál mluvčího  $s(t)$  nebyl přítomen. Bohužel, v praxi není tato podmínka statistické nezávislosti  $\tilde{u}(t)$  a  $s(t)$  vždy splněna. Možností, jak situaci lépe řešit, je adaptovat filtr pouze v časových úsecích, kdy mluvčí nepromlouvá. Adaptovaný filtr pak korektně potlačuje echo  $\tilde{u}(t)$  signálu z reproduktoru i za přítomnosti signálu mluvčího  $s(t)$ . Toto řešení ovšem vyžaduje další aparát pro detekci řečové aktivity mluvčího, nehledě na další komplikace reálné situace v automobilu.

Pro potlačování echa lze použít i jiné adaptivní algoritmy. V úloze použité LMS a N-LMS jsou vhodné pro aplikace v malých zatlumených prostorech (automobil apod.), kde se neznámý systém modeluje pomocí digitálního FIR filtru. Algoritmy z rodiny LMS jsou méně složité, jejich výpočetní náročnost je řádově  $\mathcal{O}(N)$ , oproti kvalitativně lepším algoritmům jako je např. RLS ( $\mathcal{O}(N^2)$ ), viz [2]. Nevýhodou LMS algoritmů je jejich pomalejší konvergence a

v případě základního LMS algoritmu i závislost na energii vstupního signálu.

### 2.1. LMS a N-LMS

Algoritmy typu LMS (least mean squares) jsou aproximací algoritmu rekurzivních nejmenších čtverců (RLS) (viz [2]). Odvození LMS vychází z úlohy, kdy je modelován neznámý systém číslicovým filtrem s konečnou impulsovou odezvou (FIR). Jeho výstupní signál lze zapsat rovnicí:

$$\hat{d}_k = \mathbf{w}_k^T \cdot \mathbf{u}_k, \quad (3)$$

kde  $\mathbf{w}_k$  je vektor koeficientů filtru o délce  $N$  a  $\mathbf{u}_k$  je vektor vstupních dat délky  $N$ .

Chybový signál systému s LMS algoritmem je pak

$$e_k = d_k - \hat{d}_k, \quad (4)$$

kde  $d_k$  je výstupní signál neznámého systému a  $\hat{d}_k$  je výstupní signál modelujícího filtru (rovnice 3).

Změna (adaptace) koeficientů AF –  $\mathbf{w}_k$  pomocí LMS algoritmu závisí na předcházejících koeficientech filtru v čase  $k-1$  a na jejich „opravě“, která závisí na výstupu systému  $e_k$ . Výsledný vztah pro adaptaci koeficientů je:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mu e_k \mathbf{u}_k, \quad (5)$$

kde  $\mu$  je parametr určující míru opravy koeficientů, přičemž jeho velikost je omezena ze shora energií  $\epsilon$  signálu  $u_k$ , tj.  $0 < \mu < 1/\epsilon$ .

Vylepšenou variantou LMS je *normalizovaný* LMS algoritmus (N-LMS). Motivací k modifikaci LMS je potřeba nezávislosti konvergence algoritmu na parametrech vstupního signálu  $u_k$ , resp. jeho energii ( $\epsilon$ ). Vztah pro adaptaci koeficientů N-LMS je:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \frac{\alpha}{\epsilon + \epsilon} e_k \mathbf{u}_k, \quad (6)$$

kde  $\alpha$  je konvergenční konstanta ( $0 < \alpha < 2$ ),  $\epsilon$  je energie vstupního signálu  $u_k$  a  $\epsilon > 0$  je malá konstanta zabraňující divergenci v případě, kdy  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Konvergenční konstanty  $\mu$  a  $\alpha$  obou algoritmů mají významný vliv na rychlost a stabilitu jejich konvergence.

## 3. Architektura návrhu

### 3.1. Implementace algoritmů na FPGA

Jednou z velkých předností programovatelných obvodů FPGA je možnost snadné paralelizace algoritmů, díky které lze vytvářet velmi výkonné realizace algoritmů. Pro popis implementace na polích typu FPGA se obecně používají HDL jazyky (high definition language), např.: VHDL, Verilog. Jedním z moderních vývojových systémů je prostředí DK od fy Celoxica [10], který byl použit při naší implementaci. Vývojový systém DK je založen na programovacím jazyce Handel-C, který vznikl modifikací ANSI C pro programování paralelních systémů, a řadí se mezi tzv. „rapid prototyping“ systémy.

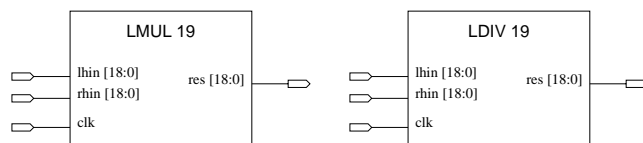
### 3.2. LNS – logaritmický numerický systém

Logaritmický numerický systém (logarithmic numbering system) vznikl jako výstup projektu HSLA na oddělení Zpracování signálů ÚTIA AV ČR (podrobnosti viz [11]). Aritmetická jednotka LNS (LALU) implementuje základní matematické operace necelých čísel v logaritmické oblasti (základu 2). Toto řešení využívá, dle matematického základu, výhod logaritmické oblasti, především faktu, že jsou operace násobení a dělení transformovány na operace sčítání a odčítání. Nevýhoda logaritmické oblasti je ovšem v operacích sčítání a odčítání, které je nutno řešit aproximací. Mezi další nevýhody LNS obvykle patří nutnost konverze čísel do logaritmické reprezentace.

Vzhledem k tomu, že potlačení echa vyžaduje vysoký řád AF, čímž rostou nároky na chyby a rozsah zobrazení čísel, bylo v implementaci použito zobrazení s plovoucí řádovou čárkou (floating point). Aritmetická jednotka LNS byla potom vybrána jako alternativa k IEEE aritmetice plovoucí čárky.

### Komponenty logaritmického systému

Rozebereme-li algoritmus LMS, zjistíme, že k jeho výpočtům potřebujeme provádět operace násobení a sčítání/odčítání. U algoritmu N-LMS je navíc potřeba operace dělení. Použité základní bloky LNS byly logaritmické násobení (LMUL), logaritmický součet (LADD) a logaritmické dělení (LDIV). Bloky násobení a dělení jsou ukázány na obrázku 3. Jedná se o bloky se dvěma vstupy pro operandy, vstupem pro hodinový signál a výstupem pro výsledek.



Obrázek 3: Bloky násobení (LMUL) a dělení (LDIV) systému LNS v 19bitové verzi

O něco složitější je blok součtu. Kvůli problematice operace součtu v logaritmické oblasti je tento blok podstatně komplikovanější a náročnější na HW prostředky FPGA. V implementaci byla použita zdvojená verze bloku sčítání (LADDSUB), která sdílí aproximační tabulky uložené v dual-portových blokových pamětech ([5]). Díky tomu umožňuje provádět dvě operace sčítání nebo odčítání najednou (obrázek 4). Kromě operandů a výsledků má blok LADDSUB ještě dva vstupy, které řídí volbu mezi operacemi sčítání a odčítání.

### 3.3. Řešení sumy součinů – MAC

Suma součinů je při číslicové filtraci nejčastější operace. Jako vhodné se ukázalo vytvořit blok sumy součinů (MAC) zvlášť a potom jej samostatně používat. Struktura bloku MAC je nastíněna na obrázku 5.



dého ze signálů vybrán krátký úsek, který byl použit jako vstupní signál algoritmů. Délka těchto úseků byla 1,25 s (20000 vzorků).

Výsledky experimentů spočítané na hardware byly porovnány se simulací v Matlabu.

### Potlačení echa bez signálu mluvího

Jako kritérium pro posouzení potlačení echa bez signálu mluvího  $s(t)$  (tzv. near-end signálu) byl vybrán poměr signál a šumu (SNR) definovaný jako:

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{\epsilon_{e_k}}{\epsilon_{d_k}}, \quad (7)$$

kde  $\epsilon_{e_k}$  je energie chybového signálu a  $\epsilon_{d_k}$  je energie signálu s echem.

Výsledné hodnoty potlačení echa (SNR) pro tento experiment ukazují tabulka 4.

signál	řád	LMS		N-LMS	
		konverg. konst.	SNR [dB]	konverg. konst.	SNR [dB]
„mluvena-m“	50	0,2	-3,87	1	-4,88
	250	0,17	-10,4	0,6	-10,3
	500	0,1	-11,9	1	-12,1
	1000	0,06	-14,4	1,7	-16,4
	5000	0,01	-18,1	1,7	-19,7
	10000	0,007	-20,0	1,9	-20,8
„umela-m“	50	1,1	-2,84	1	-2,32
	250	0,3	-4,17	0,6	-4,68
	500	0,19	-5,22	0,8	-4,25
	1000	0,1	-6,73	1	-6,62
	5000	0,03	-9,55	1,6	-11,4
	10000	0,03	-12,9	1,9	-15,1
„sum“	50	0,7	-1,98	1	-3,00
	250	0,5	-5,34	0,6	-5,98
	500	0,7	-7,41	1	-7,20
	1000	0,45	-9,40	1	-9,94
	5000	0,05	-16,2	0,8	-16,2
	10000	0,05	-19,5	0,9	-20,4

Tabulka 4: Vyhodnocení SNR potlačení echa bez signálu mluvího

### Potlačení echa se signálem mluvího

K vyhodnocení tohoto experimentu byl použit parametr ERLE (echo return loss enhancement, viz [9]), jako poměr směsi echa se signálem mluvího ku signálu chybovému

$$\text{ERLE} = 10 \log \frac{\epsilon_{(d_k+n_k)}}{\epsilon_{e_k}}, \quad (8)$$

kde  $\epsilon_{(d_k+n_k)}$  je energie směsi signálů echa a mluvího a  $\epsilon_{e_k}$  je energie chybového signálu.

Tabulka 5 udává vyhodnocení potlačení echa pro poměr echa ku signálu mluvího  $\text{SNR}_{f_n} = -10$  dB.

### Měření dat

Záznamy reálných signálů byly pořízeny v laboratoři katedry fyziky ČVUT-FEL. Na digitální médium DAT byly se vzorkovacím kmitočtem 44,1 kHz nahrány tyto signály:

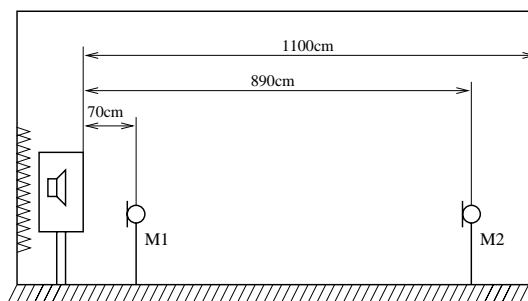
řád	ERLE [dB]					
	50	250	500	1000	5000	10000
„sinus“	2,41	2,29	3,67	8,71	13,1	15,9
„sum“	3,21	2,49	4,35	8,20	13,1	15,9
„mluvena-m“	14,2	17,1	16,0	14,4	11,5	12,8
„umela-m“	5,31	5,00	8,65	12,4	14,1	16,9
„mluvena-f“	2,69	4,87	4,24	6,42	15,2	21,8
„umela-f“	4,62	6,64	8,80	13,5	15,7	18,7

Tabulka 5: Vyhodnocení ERLE potlačení echa se signálem mluvího „mluvena-m“ při  $\text{SNR}_{f_n} = -10$  dB

1. Sinusový o frekvenci 1 kHz.
2. Frekvenčně omezený bílý šum, střední frekvence 1 kHz, rozptyl  $\pm 200$  Hz.
3. Umělý řečový signál mužského mluvího, signál odpovídá telekomunikačnímu standardu ITU-T P.50. Vzorkovací kmitočet zdrojového signálu je 16 kHz.
4. Řečový signál mužského mluvího vzniklý záznamem z rozhlasového přijímače. Vzorkovací kmitočet zdrojového signálu je 16 kHz.

Záznamová aparatura (obrázek 7) byla složena z následujících komponent:

- Měřicí mikrofony B&K 4190.
- Měřicí systém B&K Pulse.
- Třípásmová reprosoustava B&W.
- DAT rekordér/přehrávač: SONY TCD D100.



Obrázek 7: Záznamová aparatura v laboratoři, mikrofon M1 – levá stopa záznamu, mikrofon M2 – pravá stopa

## 6. Závěr

Z tabulky 2 ukazující délky výpočtů výsledku jednotlivých algoritmů je vidět, že díky paralelizaci N-LMS algoritmu je délka jeho výpočtu jen o jeden hodinový cyklus delší než u algoritmu LMS. Z toho je patrná výhoda paralelní architektury FPGA pro implementace algoritmů zpracování signálů.

Zvýšení výpočetního výkonu implementace lze dosáhnout zvětšením počtů bloků MAC. Tím se výpočty rozdělí do více paralelních cest. Taková implementace však spotřebuje větší část z HW prostředků FPGA. Rozdělení výpočtů je, mimo jiné, podmíněno současnou dostupností dat, se kterými se výpočty provádějí. V případě námi implementovaných algoritmů není problém tuto podmínku splnit.

Pokud by praktické použití implementace vyžadovalo vyšší vzorkovací frekvence vstupních signálů, než dosáhla implementace s malým obsazením čipu (viz tabulka 3), lze jinou konfigurací bloků algoritmů dosáhnout jejího zvýšení (viz výše).

V jednom případě experimentu potlačování echa se signálem mluvčího je porušena, v textu uvedená, podmínka o statistické nezávislosti mezi signálem mluvčího a signálem echa. Ve vyhodnocení (viz tab. 5) je patrné, že jde o signál označený „mluvena-m“. V dotyčném řádku tabulky vidíme klesající trend hodnot ELRE s rostoucím řádem N-LMS, přitom ostatní kombinace signálů mají trend rostoucí. Tento rozdíl připisujeme faktu, že lépe aproximující filtr (vyšší řád) více potlačuje složky signálu echa i signálu mluvčího.

Vzhledem k tomu, že v létě roku 2004 byla vydána nová verze LNS aritmetiky, která vznikla s použitím nových verzí vývojových nástrojů, lze nyní blok operace sčítání (LADDSUB) provozovat při taktovacích kmitočtech FPGA až 90 MHz. Díky tomu bude další verze systému potlačujícího echo výkonnější.

Naši současnou implementaci bude účelné porovnat s jinými implementacemi dalších adaptivních algoritmů, jako je QR-RLS, Lattice-RLS a další (viz [4], [7] a [8]).

## Poděkování

Tento příspěvek byl podporován výzkumným záměrem MSM 212 300 016.

## Reference

[1] Sovka, P., Pollák, P.: *Vybrané metody číslicového zpracování signálů*, skripta ČVUT, 2001.

[2] Proakis, J. G., Moonen, M., Proudlar, I. K., et al.: *Algorithms for statistical signal processing*, Prentice-Hall, 2002.

[3] Haykin, S.: *Adaptive filter theory*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1991.

[4] Albu, F., Kadlec, J., Softley, C., Matoušek, R., Heřmánek, A., Coleman, J. N., Fagan, A.: *Implementation of (Normalised) RLS Lattice on Virtex*, In: Field-Programmable Logic and Applications, Proceedings (Brebner, G., Woods, R. eds.) (Lecture Notes in Computer Science. 2147), Springer, Berlin 2001, pp. 91–100.

[5] Coleman, J. N., Kadlec, J.: *Extended Precision Logarithmic Arithmetic*, In: Signal Systems and Computers 2000, 34th Asilomar Conference on Signal Systems and Computers, Proceedings IEEE Signal Processing Society, Monterey 2001, pp. 124–129.

[6] Matoušek, R., Tichý, M., Pohl, Z., Kadlec, J., Softley, C.: *Logarithmic number system and floating-point arithmetics on FPGA*, In: Field-Programmable Logic and Applications: Reconfigurable Computing Is Going Mainstream.

[7] Heřmánek, A., Pohl, Z., Kadlec, J.: *FPGA implementation of the adaptive lattice filter*, In: Field-Programmable Logic and Applications, Proceedings of the 13th International Conference, (Cheung, P. Y. K., Constantinides, G. A., de Sousa, J. D. eds.), (Lecture Notes in Computer Science. 2778), Springer, Berlin 2003, pp. 1095–1098.

[8] Schier, J., Heřmánek, A.: *FPGA implementation of recursive QR update using LNS arithmetic*, In: Proceedings of the 4th IEEE Benelux Signal Processing Symposium, Technical University, Delft 2004, pp. 1–4.

[9] Stenger, A., Rabenstein, R.: *An acoustic echo canceller with compensation of nonlinearities*, proceedings EUSIPKO 98, Sept. 1998, pp. 969–972.

[10] <http://www.celoxica.com>

[11] <http://www.utia.cas.cz/ZS/projects/hsla>



# Příspěvek ke způsobu určení optimální pracovní frekvence interferometru pro ultrazvukovou detekci termálních značek

Jaroslav Plocek

ČVUT–FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6

e-mail: plocek@fel.cvut.cz

This paper shortly reviews several recently checked methods for optimal interferometer frequency searching in liquid marking flowmeters and describes their problems. It introduces some other searching criteria and their testing in view to their use in these flowmeters.

## 1. Úvod

V rámci výzkumu kapalinového průtokoměru s termální značkou, generovanou i detekovanou ultrazvukem z vnější strany trubice [1], hledáme stále optimální metody pro detekci termální značky. Hlavní kritéria výběru jsou přitom spolehlivost detekce, relativní jednoduchost systému i signálových procedur a s tím úzce související rychlá schopnost adaptace systému na nové prostředí (trubic i kapalinu). Tento článek má za cíl informovat o dalších možnostech, které jsme vyzkoušeli a které nás k hledanému cíli přibližují.

## 2. Aplikovaná metoda ultrazvukové detekce termálních značek

Používáme interferometrickou metodu se dvěma měniči, uloženými proti sobě z obou vnějších stran trubice [2]. Její výhodou je vysoká citlivost detekce, hlavním problémem pak rozsáhlé spektrum rezonancí, odpovídajících různým vibračním modům trubice i kapaliny. Je tedy třeba řešit otázku vhodného naladění vysílací frekvence tak, aby dosažená rezonance reprezentovala vlnu procházející kapalinou a nesla informaci o rychlosti šíření v ní. Této problematice je převážně věnován následující text.

### 2.1. Metody vyhledávání optimální frekvence a jejich hodnocení

Obecně je lze rozdělit na

- přímé – vhodnost nalezené frekvence k měření je testována přímo termální značkou [1, 2],
- nepřímé – vhodnost nalezené frekvence k měření je zjišťována z jejích vlastností (např. z činitele jakosti, [4]).

Přímá metoda vede vždy k nalezení frekvence vhodné k měření (pokud taková frekvence existuje). Podstatnou nevýhodou přímé metody je však často z aplikačního hlediska nepřijatelně zdoluhavá testovací procedura.

Nepřímé metody naproti tomu nezaručují spolehlivé nalezení optimální frekvence. V závislosti na sledovaných kritériích mohou však poskytnout rychle a efektivně výsledky

(které se následně přímou metodou pouze rychle ověří). Výzkumný potenciál nepřímých metod se proto pokoušíme náležitě využít.

### 2.2. Vyhledávací kritéria pro nepřímé metody

Kmitočtová závislost přenosu napětí mezi měniči interferometru je (v okolí jejich pracovní frekvence) převážně určena skládáním několika vlnění stejné frekvence s obecně různou a kmitočtově závislou amplitudou a fází (uvážujeme současné šíření kapalinou i pláštěm trubice, v plášti pak možnost existence podélné, příčné i povrchové vlny). Při napájení vysílacího měniče sinusovým signálem s konstantní amplitudou bude napětí na přijímacím měniči

$$u(\omega, t) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega) \sin(\omega t + \varphi_i(\omega)), \quad (1)$$

kde závislosti  $U_i(\omega)$  a  $\varphi_i(\omega)$  jsou v uvažovaném relativně úzkém kmitočtovém pásmu výrazně ovlivněny především podmínkami vzniku stojatého vlnění v kapalině a trubici. Při splnění známé podmínky

$$l = k \frac{\lambda_i}{2} \quad \left( \begin{array}{ll} k = 1, 2, 3, \dots & \\ l_i - \text{délka dráhy} & \text{obě příslušné šíření} \\ \lambda_i - \text{vlnová délka} & \text{v některém z prostředí} \end{array} \right) \quad (2)$$

v některém z obou prostředí nabývá příslušné  $U_i(\omega)$  svého maxima a  $\varphi_i(\omega)$  hodnoty 0 nebo  $\pi$ . Výsledný signál na přijímací straně je za těchto podmínek opět sinusový s kmitočtově závislou amplitudou a fází

$$u(\omega, t) = U(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (3)$$

Jeho průběh lze analyticky určit jen při detailní znalosti vlastností prostředí (obtížné), experimentálně pak poměrně snadno. Z těchto důvodů navrhuje a prověřujeme skupinu nepřímých metod, pokoušejících se nalézt optimální frekvenci podle kritéria

1. maxim závislosti amplitudy na frekvenci
2. minim závislosti amplitudy na frekvenci
3. maxim  $|\partial A / \partial \omega|$
4. maxim  $|\partial \varphi / \partial \omega|$
5. maxim činitele jakosti  $Q$  [4] (obsahuje předchozí podmínky).

### K realizaci měření podle uvedených kritérií

Veškerá měření podle 1) až 5) lze realizovat postupným vyhodnocováním výstupů amplitudového a fázového detektoru při současném krokovém zvyšování či snižování frekvence. Komplexnější, rychlejší i jednodušší možností je zavedení kmitočtové či fázové modulace s malým zdvihem do signálu pro vysílací měnič. Na přijímací straně lze pak snadno z přítomnosti a hloubky amplitudové modulace v signálu (detekce FM na boku rezonanční křivky) usuzovat na míru naplnění dynamických kritérií 3) a 4), resp. 5).

### Okolnosti vzniku blízkých rezonancí

Podmínka vzniku stojatého vlnění (2) může být v soustavě trubice – kapalina obecně splněna i pro dvě blízké frekvence  $f_1$  a  $f_2$  takové, že

$$|f_1 - f_2| \leq B, \quad (4)$$

kde veličinou  $B$  je míněna šířka pásma, určená činitelem jakosti některé z obou rezonancí

$$B = \frac{f_{1,2}}{Q_{1,2}}. \quad (5)$$

Kmitočtová závislost přenosu napětí mezi měniči interferometru je pak v okolí  $f_1$  a  $f_2$  členitější a její vhodnost k měření závisí na tom, zda jsou obě stojaté vlny realizovány v kapalině, nebo obě či některá v plášti trubice. Je proto na místě zvážit pravděpodobnost výskytu zmíněných situací.

Pro kapalinový průtokoměr ( $c_{\text{kap}} \approx 1500 \text{ ms}^{-1}$ ) s měniči na pracovní frekvenci  $f_0 \approx 2,5 \text{ MHz}$  je  $\lambda_{\text{kap}} = c_{\text{kap}}/f_0 = 0,6 \text{ mm}$ , podmínka (2) je splněna např. při průměru trubice  $d = 8 \text{ mm}$  pro  $k = 2d/\lambda_{\text{kap}} \doteq 27$ . Rozdíl sousedních frekvencí je

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = [(k+1) - k] \frac{c_{\text{kap}}}{2d} = \frac{c_{\text{kap}}}{2d} = 93,7 \text{ kHz}. \quad (6)$$

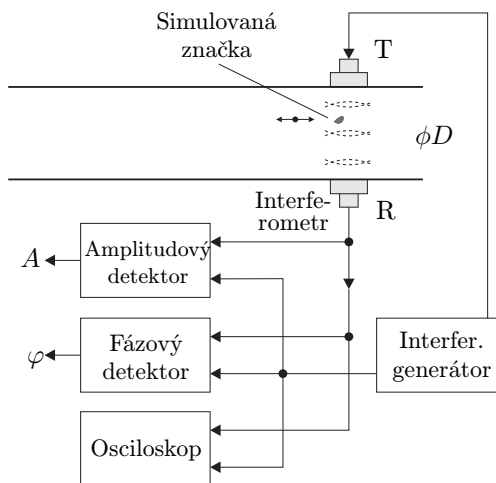
Činitel jakosti  $Q_{\text{kap}}$  mívá (ze zkušenosti) hodnotu řádově  $10^3$ , odpovídající šířka pásma je  $B_{\text{kap}} = f_0/Q_{\text{kap}} = 2,5 \text{ kHz}$ . Je tedy

$$B_{\text{kap}} \ll \Delta f_k, \quad (7)$$

takže výše zmíněný případ nemůže nastat při šíření pouze v kapalině.

Pro poměry v plášti trubice ( $l \approx (\pi/2)d$ ,  $c_p > c_{\text{kap}}$ ,  $Q_p \leq Q_{\text{kap}} \Rightarrow B_p \geq B_{\text{kap}}$ ) zůstává nerovnost (7) v platnosti. Je tedy i kmitočtová odlehlost dvou sousedních rezonancí v plášti trubice dostatečně velká, než aby mohlo dojít k jejich vzájemnému ovlivnění.

Vzájemně se ovlivňující blízké rezonance zaregistrované měření mají proto původ výhradně v kombinaci šíření pláštěm trubice a kapalinou.



Obrázek 1: Schéma uspořádání experimentu

## 3. Experimentální ověření

### 3.1. Uspořádání experimentu

Ověření účinnosti jednotlivých výše uvedených kritérií pro vyhledávání optimální frekvence jsme prováděli v uspořádání podle obrázku 1. Skleněná trubička (použité vnější průměry 6, 10, 12 a 13 mm) byla naplněna vodou při laboratorní teplotě. Piezokeramické měniče o průměru 8 mm a pracovní frekvenci 2,5 MHz byly přitisknuty na trubičku rovnoběžně z obou stran pomocí speciálního přípravku. Syntetizátorový budicí generátor umožňoval při frekvencích okolo 2,5 MHz frekvenční krok 1 kHz a frekvenční modulaci externím signálem s nastavitelným zdvihem. Signál z přijímacího měniče byl vyhodnocován pomocí amplitudového detektoru, fázoměru a osciloskopu. Termální značka byla simulována mechanickým vkládáním malé nehomogeneity s odpovídajícím účinkem (ocelový drátek o průměru 0,3 mm).

### 3.2. Postup měření a naměřené hodnoty

V kmitočtovém pásmu 2,3–2,5 MHz byly postupně s krokem 1 kHz vyhledávány frekvence, při nichž byly na přijímací straně shledány následující stavy

- maximum amplitudy
- minimum amplitudy
- vysoká hodnota  $|\partial A/\partial \omega|$
- vysoká hodnota  $|\partial \varphi/\partial \omega|$
- amplitudová modulace signálu

Zároveň bylo pro každou takto nalezenou frekvenci ověřováno, zda a s jakou citlivostí reaguje na (simulovanou) termální značku. Výsledky měření pro trubičku o průměrech 10/7 mm jsou shrnuty v následující tabulce 1.

## 4. Interpretace výsledků

Pro posouzení efektivnosti jednotlivých vyhledávacích kritérií jsou nejvýznamnější výstupní hodnoty, vyjadřující



citlivost detekce značky, tedy  $\Delta A$ ,  $\Delta\varphi$  nebo  $\Delta A_m$ . Stanovíme-li práh spolehlivé detekce na pozadí přirozených fluktuací na 10 %, můžeme vyjádřit pravděpodobnost detekce na frekvencích vyhledaných podle příslušného kritéria jako

$$P = \frac{\text{počet frekvencí vyhovujících podmínce 10\% prahu}}{\text{celkový počet všech nalezených frekvencí}}$$

Hodnoty  $P$  pro jednotlivá kritéria jsou sestaveny v následující tabulce:

kritérium	a)	b)	c)	d)	e)
$P$	0,44	1	1	1	1

K jemnějšímu rozlišení efektivnosti a určení pořadí zbývajících čtyř relativně spolehlivých kritérií b) až e) se nabízí střední hodnota

$$\overline{\Delta}_{\max} = \sum_{i=1}^n \Delta_{i,\max}$$

určená ze souboru nadprahových citlivostí zvlášť pro každé kritérium (v tabulce 1 vyznačeny tučným tiskem). Výsledky a z nich vyplývající pořadí jsou v další tabulce:

kritérium	b)	c)	d)	e)
$\Delta_{i,\max}$	17,5	18,3	16,0	32,7
Pořadí	3	2	4	1

Ke stejnému pořadí efektivnosti kritérií vede hodnocení podle parametru  $\overline{\Delta}$  (střední hodnota souhrnné citlivosti), jak je uvedeno v tabulce poslední:

kritérium	b)	c)	d)	e)
$\Delta$	24,3	26,4	22,2	32,7
Pořadí	3	2	4	1

(pro e) je  $\overline{\Delta}_{i,\max} = \overline{\Delta}$ ). Souhrnná citlivost  $\Delta$  vyhodnocuje vyhledávání využívající současně signálů z fázového i amplitudového detektoru.

Zjevně nejspěšnější vyhledávací kritérium e) má však ještě další přednosti:

- o frekvence podle něho vyhledané lze prakticky v 90 % případů ztotožnit s frekvencemi vyhledanými podle ostatních kritérií a poskytujícími zároveň nadprahovou citlivost detekce
- o vyhledávání modulační frekvence v přijímaném signálu lze na pozadí rušivých signálů (vzhledem k jeho

přísné periodicitě) realizovat efektivněji (rychleji a s vyšší citlivostí), než vyhledávání podle ostatních kritérií

Výsledky měření pro ostatní průměry trubiček využívané v experimentech potvrzují obecné závěry zde uvedené.

## 5. Závěr

V příspěvku byla prověřena vyhledávací kritéria nepřímých metod pro určování optimální pracovní frekvence interferometru využívaného k detekci termálních značek. Největší efektivnost byla shledána u metodiky využívající přídatnou frekvenční modulaci budicího signálu interferometru a její následnou detekci formou vyhledávání amplitudové modulace v přijímaném signálu.

## Poděkování

Tento výzkum je podporován výzkumným záměrem číslo MSM 212 300 016.

## Reference

- [1] Malinský, K., Plocek, J.: *A new kind of ultrasonic flowmeter for measuring small flow rates*, 35th International Conference on Ultrasonics and Acoustic Emission, Třešť, (Czech Republic), s. 14–18, September 1998
- [2] Plocek, J.: *Metody detekce průchodu značky v ultrazvukovém značkovacím průtokoměru pro měření malých průtoků kapalin*, 13. konference slovenských a českých fyziků, Zvolen, s. 23–26, August 1999
- [3] Plocek, J.: *Ověřování možnosti UZ detekce indukovaných termálních značek v proudící kapalině*, 60. akustický seminář & 36. akustická konference, Kouty, sborník s. 141, ISBN 80-01-02179-3, květen 2000
- [4] Plocek, J., Malinský, K.: *Ultrasonic Thermal Mark Flowmeter Criteria for Searching Optimal Interferometer Operational Frequency*, CTU Reports, Proceedings of Workshop 2002, Vol. A, p. 142, ISBN 80-01-02511-X, February 2002

Tabulka 1: Přehled výsledků měření

a) Maxima amplitudy:

Id.č.	$f$ [MHz]	$A$ [%]	$ \Delta A $ [%]	$\varphi$ [%]	$ \Delta\varphi $ [%]	$\Delta =  \Delta A  +  \Delta\varphi $	AM
1	2,339	90	10	57	3	13	32
2	,358	80	10	53	5	15	
3	,444	88	8	50	3	11	
4	,494	95	0	88	0	0	
5	,590	55	0	0	0	0	
6	,639	80	15	37	3	18	
7	,659	70	5	74	3	8	
8	,672	66	5	90	0	5	
9	,765	80	25	22	3	28	
						$\overline{\Delta} = 12,25$	

b) Minima amplitudy:

Id.č.	$f$ [MHz]	$A$ [%]	$ \Delta A $ [%]	$\varphi$ [%]	$ \Delta\varphi $ [%]	$\Delta =  \Delta A  +  \Delta\varphi $	AM
10	2,355	40	<b>10</b>	45	5	15	
11	,378	50	<b>15</b>	18	5	20	
12	,426	40	<b>15</b>	28	0	15	33
13	,443	50	<b>10</b>	55	5	15	34
14	,470	15	<b>15</b>	70	10	25	35
15	,559	7	15	20	<b>40</b>	55	37
16	,579	18	15	33	<b>15</b>	30	38
17	,648	28	<b>20</b>	40	0	20	39
						$\bar{\Delta} = 24,3$	

c) Vysoké hodnoty  $|\partial A/\partial\omega|$ :

Id.č.	$f$ [MHz]	$ \Delta A/\Delta\omega $	$ \Delta A $ [%]	$\varphi$ [%]	$ \Delta\varphi $ [%]	$\Delta =  \Delta A  +  \Delta\varphi $	AM
18	2,344	72	<b>20</b>	40	5	25	
19	,357	55	<b>10</b>	60	5	15	
20	,423	67	<b>15</b>	41	3	18	
21	,425	35	<b>25</b>	37	10	35	
22	,558	15	15	30	<b>25</b>	40	
23	,645	45	5	60	<b>10</b>	15	
24	,648	40	15	30	<b>25</b>	40	
25	,743	18	15	85	<b>15</b>	30	
26	,766	80	<b>20</b>	20	0	20	
						$\bar{\Delta} = 26,4$	

d) Vysoké hodnoty  $|\partial\varphi/\partial\omega|$ :

Id.č.	$f$ [MHz]	$ \Delta\varphi/\Delta\omega $	$ \Delta A $ [%]	$\varphi$ [%]	$ \Delta\varphi $ [%]	$\Delta =  \Delta A  +  \Delta\varphi $	AM
27	2,471	20	5	75	<b>20</b>	25	
28	,562	37	8	68	<b>20</b>	28	
29	,581	27	<b>10</b>	5	5	15	
30	,642	75	3	37	<b>10</b>	13	
31	,694	15	10	15	<b>20</b>	30	40
						$\bar{\Delta} = 22,2$	

e) Amplitudová modulace:

Id.č.	$f$ [MHz]	$A_m$ [%]	$\Delta A_m$ [%]	Souvislost s Id.č.
32	2,339	70	<b>65</b>	1
33	,428	29	<b>27</b>	12
34	,441	45	<b>42</b>	13
35	,472	30	<b>28</b>	14
36	,534	55	<b>52</b>	–
37	,563	25	<b>23</b>	15
38	,579	30	<b>28</b>	16
39	,651	20	<b>19</b>	17
40	,695	11	<b>10</b>	31
			$\bar{\Delta} = 32,7$	

Vysvětlivky:

- Id.č. – identifikační číslo nalezené frekvence
- $f$  [MHz] – hodnota nalezené frekvence
- $A$  [%] – relativní amplituda (ve vztahu k maximální možné hodnotě)
- $|\Delta A|$  [%] – změna relativní amplitudy vyvolaná zavedením značky („citlivost“ v amplitudě), v abs. hodnotě
- $\varphi$  [%] – fázový posun signálu na přijímací straně vůči straně vysílací, vyjádřeno v procentech rozsahu fázoměru (180°)
- $|\Delta\varphi|$  [%] – změna fáz. posunu vyvolaná zavedením značky („citlivost“ ve fázi), v absolutní hodnotě
- $\Delta = |\Delta A| + |\Delta\varphi|$  – součet změn rel. amplitudy a fáze vyvolaných zavedením značky (souhrnná citlivost)
- $\bar{\Delta}$  – střední hodnota  $\Delta$  pro soubor dílčí tabulky
- AM – odkaz na Id.č. frekvence, na níž byla nezávisle detekována amplitudová modulace
- $|\Delta A/\Delta\omega|$  – změna relativní amplitudy vyvolaná kmitočtovým skokem 1 kHz (bez ohledu na znaménko)
- $|\Delta\varphi/\Delta\omega|$  – změna fáz. posunu vyvolaná kmitočtovým skokem 1 kHz (bez ohledu na znaménko)
- $A_m$  [%] – hloubka AM v přijímaném signálu
- $\Delta A_m$  [%] – změna hloubky modulace vyvolaná zavedením značky
- AM – odkaz na související Id.č. frekvence nalezené podle výskytu AM v přijímaném signálu

# Aktivní potlačování harmonických ve válcovém akustickém rezonátoru

Petr Koníček

ČVUT–FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6

e-mail: konicek@fel.cvut.cz

New approximate solution of the inhomogeneous Burgers equation for real fluid in stationary state regime is shown in this work. This solution is derived using the Prandtl's technique. Validity of the approximate solution is verified by comparison with the numerical one. The method of the active second harmonic suppression in nonlinear acoustical resonator is analyzed in this work. The finite-amplitude standing waves in a resonator of a constant diameter can be described by means of the inhomogeneous Burgers equation. The resonator is driven by a piston whose motions are characterized by two superposed sinusoidal motions. The frequency of the first motion  $f$  is equal to the resonator eigenfrequency and the frequency of the second one is  $2f$  and its the phase shift is 180 degrees.

## 1. Úvod

Využití nelineárních stojatých vln konečné amplitudy je omezeno nelineárním útlumem, který vyvolává akustický saturační efekt. Důležitou charakteristikou rezonátoru je činitel jakosti  $Q$ , který udává, kolikrát je amplituda stojaté vlny v rezonátoru větší než amplituda budících kmitů. Rezonátory s vysokým činitelem jakosti lze využít například jako akustické tepelné stroje, akustické kompresory nebo chemická dezintegrační zařízení. Činitel jakosti  $Q$  závisí na amplitudě kmitů budícího pístu prostřednictvím nelineárního útlumu. Nelineární útlum je spojen s nelineární interakcí akustických vln, kdy dochází ke generaci vyšších harmonických. Protože termoviskózní útlum je úměrný čtverci kmitočtu, je možné snížit vliv nelineárního útlumu, jestliže potlačíme tyto kaskádní vlnové procesy.

Existuje více metod potlačení nelineárního útlumu a tím i zvýšení činitele jakosti daného rezonátoru. Jedna z těchto metod je založena na aktivním potlačení druhé harmonické komponenty zvukové vlny v rezonátoru [1], [2]. Další z těchto metod je pasivní a využívá selektivní frekvenční útlum [3]. Činitel jakosti je možné také zvýšit pomocí rezonanční makrosonické syntézy (RMS), která je založena na využití rezonátorů proměnného průřezu.

Tato práce je zaměřena na nalezení přibližného řešení nehomogenní Burgersovy rovnice, která popisuje aktivní potlačení druhé harmonické komponenty zvukové vlny uvnitř válcového rezonátoru konstantního průřezu. Akustické pole v rezonátoru je vytvářeno pomocí pístu, který kmitá na dvou frekvencích a umožňuje ovládat míru vzniku vyšších harmonických a tím zvyšovat činitel jakosti rezonátoru  $Q$ .

## 2. Výchozí modelové rovnice

Pro rychlostní potenciál  $\phi$  můžeme napsat modelové rovnice, které umožňují popsat osově symetrické stojaté vlny

v rezonátoru s konstantním kruhovým průřezem v druhém řádu přesnosti [4]

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \\ = -\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\gamma}{c_0^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right] - \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{b}{c_0^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}, \quad (1) \end{aligned}$$

kde  $t$  je čas,  $\rho_0$  je hustota prostředí,  $c_0$  je rychlost zvuku,  $\mathcal{L}$  je Lagrangian hustoty zvukové energie,  $x$  je souřadnice podél osy rezonátoru,  $r$  je souřadnice kolmá k jeho ose,  $\gamma$  je Poissonův koeficient,  $b$  je disipační koeficient prostředí [5].

### 2.1. Metoda řešení

Řešení výchozí rovnice (1) budeme hledat ve tvaru

$$\begin{aligned} \phi = \left[ \mu g_+ \left( \mu x, \sqrt{\mu} r, \mu t, t - \frac{x}{c_0} \right) - \right. \\ \left. - \mu g_- \left( \mu x, \sqrt{\mu} r, \mu t, t + \frac{x}{c_0} \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Protože interakce vln je zanedbatelná, ve druhém řádu přesnosti platí, že  $\mathcal{L} = 0$ . Pak můžeme funkce  $g_+$  a  $g_-$  dosadit nezávisle do rovnice (1). Hledaná rovnice bude platit za následujících podmínek:

- Časové a prostorové změny tvaru vlny jsou malé
- Amplituda stojatých vln je malá, takže je možné je pokládat za součet dvou nezávislých postupných vln
- Interakce mezi těmito vlnami existuje pouze lokálně, ale není kumulativním dějem a zůstává zanedbatelná
- Amplituda kmitů budícího pístu je tak malá, že můžeme obě strany rezonátoru pokládat za pevné

## 2.2. Modelová rovnice nelineárních stojatých vln v rezonátoru

Jestliže zanedbáme členy třetího řádu a vyšší, dostaneme po úpravách rovnici popisující zvukovou vlnu v rezonátoru. Podrobné odvození viz např. [6].

$$\frac{\partial V}{\partial s} - V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin(y) + p \sin(2y + \pi), \quad (3)$$

kde

$$s = \frac{t}{t_s}, V = \frac{\bar{v}_{\pm}}{v_0}, y_{\pm} = \omega \tau_{\pm}, \Gamma = \frac{2\rho_0 c_0 \beta v_0}{b\omega},$$

$$p = \frac{v_{m2}}{v_{m1}}, v_0 = \sqrt{\frac{v_{m1} c_0}{2\pi\beta}}, t_s = \frac{c_0}{\beta\omega v_0}. \quad (4)$$

Akustickou rychlost můžeme vyjádřit pomocí vztahu

$$\bar{v}_{\pm}(t, \tau_{\pm}) =$$

$$= v_{\pm}(t, \tau_{\pm}) \pm \frac{v_{m1} x}{2L} \sin(\omega \tau_{\pm}) \pm \frac{v_{m2} x}{2L} \sin(2\omega \tau_{\pm} + \pi), \quad (5)$$

kde  $x$  je prostorová souřadnice ve směru osy rezonátoru,  $t$  je čas,  $c_0$  je rychlost zvuku pro malé amplitudy,  $\rho_0$  je hustota tekutiny, která vyplňuje rezonátor,  $b$  je koeficient difuze,  $\beta$  je koeficient nelinearity,  $v_{m1}$  a  $v_{m2}$  jsou amplitudy akustické rychlosti pístu,  $L$  je délka rezonátoru.

Retardované časy  $\tau_{\pm}$  jsou definovány jako

$$\tau_{\pm} = t \mp \frac{x}{c_0}. \quad (6)$$

Pro akustickou rychlost  $v$  platí

$$v = v_+ - v_-. \quad (7)$$

Píst kmitá s úhlovou frekvencí  $\omega$ , která je rovna

$$\omega = \omega_{2n+1}, \quad (8)$$

$\omega_n$  je vlastní frekvence rezonátoru, daná jako

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

## 2.3. Počáteční a okrajové podmínky

V čase  $t = 0$  se v rezonátoru nenachází žádná zvuková vlna. Akustická rychlost je tedy nulová – počáteční podmínku můžeme vyjádřit jako

$$v_+(t=0) = v_-(t=0) = v(t=0) = 0. \quad (10)$$

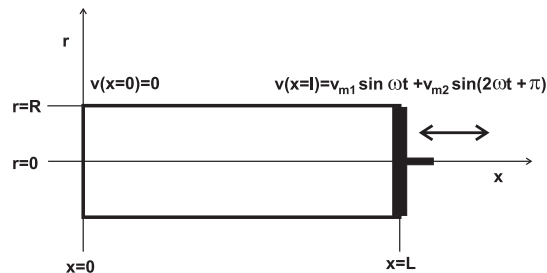
Stojaté vlny v rezonátoru jsou harmonicky buzeny (např. pístem), zdroj harmonických kmitů je umístěn na stěně rezonátoru v místě  $x = L$ .

$$v(x=L, t) = v_{m1} \sin \omega t + v_{m2} \sin(\omega t + \pi) \quad (11)$$

Protější podstava rezonátoru je tvořena pevnou stěnou a je v klidu, takže akustická rychlost je zde nulová

$$v(x=0, t) = 0. \quad (12)$$

Schematický pohled na rezonátor vidíme na obrázku 1



Obrázek 1: Schematické znázornění akustického rezonátoru buzeného pístem

## 3. Přibližné řešení nehomogenní Burgersovy rovnice Prandtlou metodou

Nehomogenní Burgersovu rovnici (3) budeme řešit ve stacionárním stavu, tj.

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0. \quad (13)$$

Vzniklou rovnici

$$-V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin(y) + p \sin(2y + \pi) \quad (14)$$

budeme řešit pomocí Prandtlovy techniky (např. podle [7], [8]). Tato technika je vhodná pro případy, kdy hledáme řešení, které se v malém intervalu rychle mění. Je proto možné ji použít pro zvukovou vlnu konečné amplitudy v rezonátoru, protože tato obsahuje oblast rázu. Prandtlou metoda je založena na tom, že nalezneme zvlášť řešení ve dvou oblastech. Řešení v oblasti s pomalou změnou budeme nazývat vnější řešení, řešení v oblasti s rychlou změnou budeme nazývat vnitřní řešení.

### 3.1. Vnější řešení

Pro  $\Gamma \rightarrow \infty$  se rovnice (14) redukuje na

$$-V \frac{dV}{dy} = \sin(y) + p \sin(2y + \pi). \quad (15)$$

Přesné řešení této rovnice budeme nazývat vnější řešení  $V^\circ$

$$V^\circ = \sqrt{2 + p + 2 \cos(y) - p \cos(2y)}. \quad (16)$$

Pro velké  $\Gamma$  je řešení redukované rovnice (15) blízké přesnému řešení (14) s výjimkou malého intervalu v okolí bodu  $y = 0$ .

### 3.2. Vnitřní řešení

V okolí  $y = 0$  se přesné řešení rychle mění, aby splnilo podmínku

$$V(0) = 0. \quad (17)$$

Tento malý interval, v němž se  $V$  rychle mění, představuje oblast rázu. Abychom našli řešení platné v této oblasti, zvětšíme ji pomocí transformace

$$\xi = \Gamma y. \quad (18)$$

Pomocí této transformace přejde rovnice (14) do tvaru

$$-V \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\Gamma} [\sin(y) + p \sin(2y + \pi)], \quad (19)$$

který se pro  $\Gamma \rightarrow \infty$  redukuje na

$$V \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0. \quad (20)$$

Obecné řešení této rovnice označíme  $V^i$  a budeme jej nazývat vnitřní řešení

$$V^i = \sqrt{2A} \tanh \left[ \sqrt{A} 2(\xi + B) \right], \quad (21)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty. Řešení (21) platí uvnitř oblasti rázu. Konstanta  $B$  je nulová, protože  $V(0) = 0$ .

### 3.3. Kompozitní řešení

Ke stanovení konstanty  $A$  použijeme metodu navázání (matching principle)

$$\lim_{y \rightarrow 0} V^o(y) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} V^i(\xi) = V^{io}, \quad (22)$$

proto  $A = 2$ . Přibližné řešení rovnice (14) je dáno jako vnější řešení  $V^o$  pro  $y$  mimo oblast rázu a jako vnitřní řešení  $V^i$  v oblasti rázu.  $V$  platné v obou oblastech nazveme kompozitní řešení  $V^c$

$$V^c = V^o + V^i - V^{io} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (23)$$

Kompozitní řešení platí pro všechna  $y$  včetně přechodové oblasti mezi vnitřním a vnějším řešením

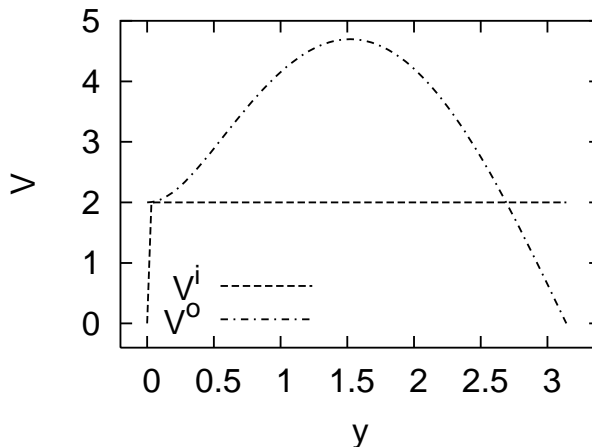
$$V^c = \sqrt{2 + p + 2 \cos(y) - p \cos(2y)} + 2 \tanh(\Gamma y) - 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Gamma}\right). \quad (24)$$

## 4. Výsledky

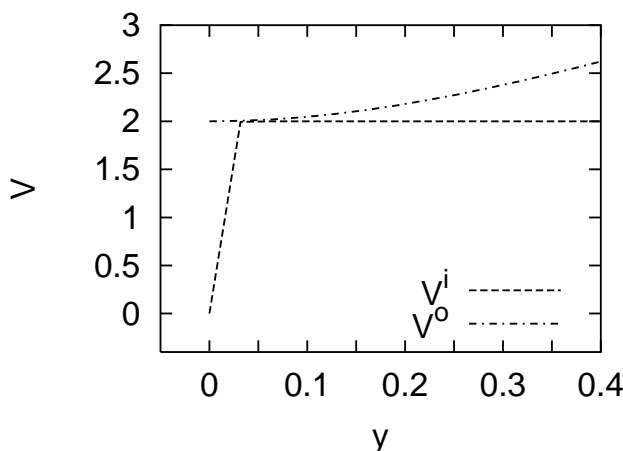
Všechny prezentované průběhy jsou vypočteny pro případ, že Goldbergovo číslo  $\Gamma = 100$ . Poměr amplitud první a druhé budící harmonické vlny  $p = 10$ . Nejprve ukážeme průběhy vnitřního a vnějšího řešení. Tyto průběhy vidíme na obrázcích 2 a 3. Obrázek 2 obsahuje průběhy vnitřního a vnějšího řešení v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Obrázek 3 obsahuje detail těchto průběhů v oblasti rázu.

Obrázky 4 a 5 obsahují srovnání výsledného kompozitního řešení  $V^c$  s numerickým řešením nehomogenní Burgersovy rovnice. Obrázek 4 obsahuje průběhy kompozitního a numerického řešení v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Obrázek 5 obsahuje detail těchto průběhů v oblasti rázu.

Numerické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice bylo provedeno ve frekvenční oblasti pro 200 harmonických. Prezentované průběhy odpovídají času  $s = 15$ , kde se již řešení s časem nemění a nacházíme se ve stacionární oblasti časového průběhu. Obyčejné diferenciální rovnice vzniklé transformací rovnice (3) do frekvenční oblasti byly řešeny standardní metodou Runge-Kutta pátého řádu.



Obrázek 2: Průběh vnitřního a vnějšího řešení v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  pro  $\Gamma = 100, p = 10$



Obrázek 3: Detail průběhu vnitřního a vnějšího řešení v oblasti rázu pro  $\Gamma = 100, p = 10$

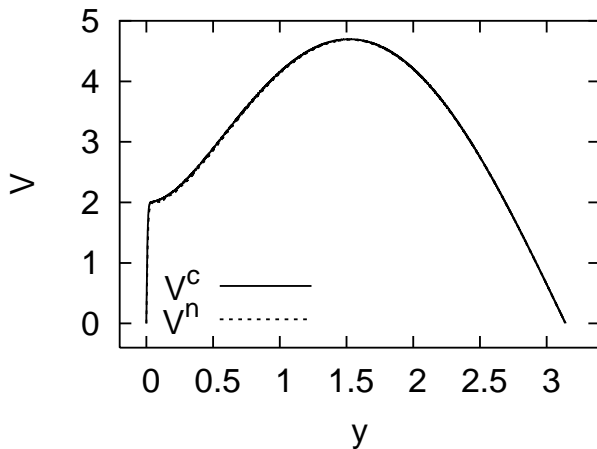
## 5. Závěr

Uvedené přibližné řešení nehomogenní Burgersovy rovnice umožňuje popis kvazirovinných nelineárních vln v rezonátorech s konstantním průřezem a s harmonickým buzením na dvou z vlastních frekvencí rezonátoru.

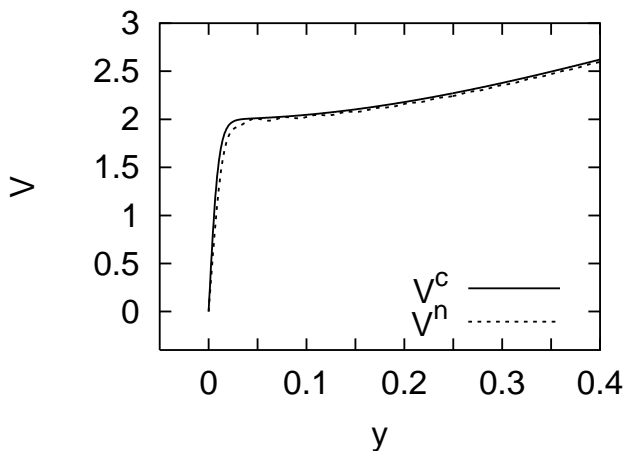
Řešení popisuje:

- nelineární děje
- absorpci
- vliv amplitudy a fázového rozdílu budících vln

Z výsledků je rovněž zřejmé, že v případě, když fázový posuv mezi první a druhou harmonickou budící vlny je roven  $\pi$ , dochází k toku energie z druhé harmonické do první. První harmonická pak významně vzroste na úkor poklesu právě druhé harmonické. Takto dochází k aktivnímu potlačení druhé harmonické frekvence zvukové vlny v rezonátoru a ke zvýšení jeho jakosti  $Q$ .



Obrázek 4: Srovnání numerického řešení s kompozitním v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  pro  $\Gamma=100$ ,  $p=10$



Obrázek 5: Srovnání numerického řešení s kompozitním v oblasti rázu pro  $\Gamma = 100$ ,  $p = 10$

## Poděkování

Tento projekt byl financován z výzkumného záměru MSM 212 300 016.

## Reference

- [1] P. Koníček, M. Bednařík: Approximate analytical solution of the inhomogeneous Burgers equation. *Czech. J. Phys.*, Vol. 54 (2004), No. 4.
- [2] V. E. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, S. Job, M. Bruneau: Enhancement of the Q of the nonlinear acoustic resonator by active suppression of harmonics. *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 3717–3720, 1998.
- [3] V. G. Andreev, V. E. Gusev, A. A. Karabutov, O. V. Rudenko, O. A. Saposhnikov: Enhancement of Q of a nonlinear acoustic resonator by means of a selectively absorbing mirror. *Sov. Phys. Acoust.* 31, 162–163, 1985.
- [4] M. Bednařík, P. Koníček: Description of quasi-plane nonlinear standing waves in cylindrical resonators. *Czech. J. Phys.*, Vol. 54 (2004), No. 3.
- [5] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock: *Nonlinear Acoustic*, USA, Academic Press, 1998.
- [6] M. Bednařík, P. Koníček: Asymptotic solutions of the inhomogeneous Burgers equation. *J. Acoust. Soc. Am.* 115, 91–98, 2004.
- [7] A. H. Nayfeh: *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.
- [8] M. Van Dyke: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, 1975.

# Nelineární stojaté vlny v elastických rezonátorech

Michal Bednařík

ČVUT–FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6

e-mail: bednarik@fel.cvut.cz

Most of works, which are dedicated to nonlinear standing waves, suppose that walls of acoustic resonators are perfectly rigid. Unlike these works this article deals with elastic resonators. For this purpose new model equations were derived. From these model equations we can obtain inhomogeneous Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) equation. The new model equation were solved numerically. On the basis the results were realized an investigation of behaviour of nonlinear standing waves in elastic resonators for various conditions.

## 1. Úvod

Díky novým znalostem z oblasti nelineární akustiky a dostupnosti výkonné výpočetní techniky můžeme být svědky poměrně vysokého zájmu o problematiku nelineárních stojatých vln v akustických rezonátorech. Všechny tyto práce vycházejí z předpokladu, že stěny uvažovaných rezonátorů jsou dokonale tuhé, tj. že tyto stěny nereagují na tlakové změny uvnitř rezonátoru. Vzhledem k této skutečnosti se nabízí otázka ohledně vzájemné interakce mezi elastickou stěnou rezonátoru a nelineární stojatou vlnou.

Tato práce si klade za cíl provést analýzu chování nelineárních stojatých vln v rezonátorech s pružnou stěnou.

## 2. Základní modelové rovnice pro nelineární stojaté vlny v elastických rezonátorech

Při popisu nelineárních stojatých vln uvnitř elastického válcového rezonátoru je možné vyjít z modifikované Kuzněcovovy rovnice (viz [1], [2])

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\rho_0 c_0^2 \kappa}{S} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

kde  $\varphi$  je rychlostní potenciál,  $t$  je čas,  $x$  je prostorová souřadnice,  $c_0$  je rychlost šíření akustických vln v lineárním přiblížení,  $\rho_0$  je hustota tekutiny vyplňující rezonátor nenarušená akustickou vlnou,  $b$  je koeficient difuze, který souvisí s viskozitou uvažované tekutiny a její tepelnou viskozitou,  $\beta$  je parametr nelinearity, jenž souvisí s nelineární závislostí akustického tlaku na akustické hustotě prostředí a na konvekci, která vychází z volby Eulerových souřadnic,  $S$  je vnitřní plocha rezonátoru a  $\kappa$  je činitel, který souvisí s mírou změny poloměru rezonátoru vlivem akustického tlaku, přičemž se předpokládá lokálnost takovýchto změn, tedy, že se nešíří stěnou rezonátoru. Při odvození modifikované Kuzněcovovy rovnice se vycházelo z předpokladu, že v rezonátoru se vybudí pouze rovinné vlny a že se efekty třetího a vyššího řádu neberou v úvahu.

Modelová rovnice (1) může být dále zjednodušena tím, že si akustické pole uvnitř rezonátoru představíme jako superpozici proti sobě postupujících nelineárních vln, které spolu neinteragují a jsou svázány toliko okrajovými podmínkami na podstavách uvažovaného rezonátoru ([3], [4], [5]). Dále je možné pro další zjednodušení řešeného problému zavést dvojí čas, tj. čas „pomalý“, který souvisí s pomalými časovými změnami ve vývoji nelineární vlny (vzhledem k periodě vlny), a čas „rychlý“, který naopak souvisí s rychlými změnami, jež souvisí se zdrojem akustických vln. Rovněž je možné předpokládat, že i prostorové změny jsou velmi malé v rámci vlnové délky. Výše popsané předpoklady je možné vyjádřit následujícím vztahem

$$\varphi = \mu \varphi_+ \left( \mu x, \mu t, \tau_+ = t - \frac{x}{c_0} \right) - \mu \varphi_- \left( \mu x, \mu t, \tau_- = t + \frac{x}{c_0} \right), \quad (2)$$

kde  $\mu \ll 1$  je malý bezrozměrný parametr a  $\tau_{\pm}$  jsou tzv. retardované (charakteristické) časy.

Dosažením výrazu (2) do rovnice (1) s přihlédnutím ke skutečnosti, že  $b \sim \mu$ ,  $\kappa \sim \mu$ , dospějeme na základě nelineární teorie druhého řádu k následujícím modelovým rovnicím

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial t} \pm c_0 \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x} - \frac{\beta}{c_0} v_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 v_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}^2} + \frac{\rho_0 c_0^2 \kappa}{2S} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}} = 0. \quad (3)$$

Řešíme-li rovnici (3) s přihlédnutím k daným počátečním a okrajovým podmínkám, pak pro akustickou rychlost nelineární rovinné stojaté vlny  $v$  můžeme psát

$$v(x, t) = v_+(x, t) - v_-(x, t). \quad (4)$$

Označme délku uvažovaného rezonátoru konstantního průřezu jako  $L$ . Pro vlastní kruhové kmitočty  $\omega_n$  pak dostaneme, že

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Uvažujme obecnější případ, kdy válcový rezonátor je buzen dokonale tuhými písty, které tvoří jeho podstavu

v místě  $x = L$ . Protilehlá podstava je považována rovněž za dokonale tuhou.

Pro počáteční a okrajové podmínky pak můžeme psát

$$v = (v_+ - v_-)_{x=0} = 0, \quad (6)$$

$$v = (v_+ - v_-)_{x=L} = v_m \sin(\omega t), \quad (7)$$

$$v_{\pm}(t = 0) = 0, \quad (8)$$

kde  $\omega = \omega_n$  a  $v_m$  reprezentuje amplitudu rychlosti kmitání pístu. Rovnice (3) spolu s podmínkami (6), (7) a (8) mohou být řešeny metodou postupných aproximací, čímž dospějeme po úpravách k následující modelové rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} + \frac{\rho_0 c_0^2 \kappa}{2S} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} = \\ = \frac{v_m c_0}{2L} \sin(\omega \tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Pro akustickou rychlost nelineární stojaté vlny uvnitř elastického rezonátoru v druhém přiblížení můžeme psát

$$\begin{aligned} v = \bar{v}(t, \tau_+) - \bar{v}(t, \tau_-) - \\ - \frac{v_m x}{2L} [\sin(\omega \tau_+) + \sin(\omega \tau_-)], \end{aligned} \quad (10)$$

kde funkci  $\bar{v}$  získáme řešením nehomogenní modifikované Burgersovy rovnice (9). Abychom dostali funkční závislost akustické rychlosti  $v$  na  $x$  a  $t$ , dosadíme za  $\tau_+ = t - x/c_0$  a za  $\tau_- = t + x/c_0$  ve vztahu (10). V řadě případů je výhodnější pracovat s nehomogenní Burgersovou rovnicí v bezrozměrném tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + E \frac{\partial V}{\partial y} = \sin(y), \quad (11)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{t}{t_s}, \quad V = \frac{\bar{v}}{v_0}, \quad y = \omega \tau, \quad \Delta = \frac{\delta c_0}{\beta v_0}, \quad \Gamma = \frac{2\rho_0 c_0 \beta v_0}{b\omega}, \\ E = \frac{\rho_0 c_0^3 \kappa}{2\beta v_0 S}, \quad t_s = \frac{c_0}{\beta \omega v_0}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{v_m c_0}{2\pi\beta}}, \quad \omega = \frac{\pi c_0}{L}. \end{aligned} \quad (12)$$

K vyšetření lokálních kmitů stěny rezonátoru můžeme použít ekvivalentního obvodu tvořeného třemi mechanickými elementy:  $C_m$  poddajnost,  $R_m$  mechanický odpor,  $M_m$  inertance, které jsou zapojeny do série. Potom pro mechanickou rezonanci radiálních kmitů můžeme psát

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M_m C_m}}. \quad (13)$$

Linearizací modifikované Kuzněčovovy rovnice (1) můžeme dospět k následující disperzní relaci

$$\begin{aligned} k = \Re(k) + j\Im(k) \simeq \frac{\omega}{c_0} + \frac{\rho_0 c_0 \omega \Re\left(\frac{\kappa}{S}\right)}{2} + \\ + j \left( \frac{\rho_0 c_0 \omega \Re\left(\frac{\kappa}{S}\right)}{2} - \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

kde  $k$  je vlnové číslo.

Pro fázovou rychlost  $c_F$  pak s použitím vztahu (14) můžeme psát, že

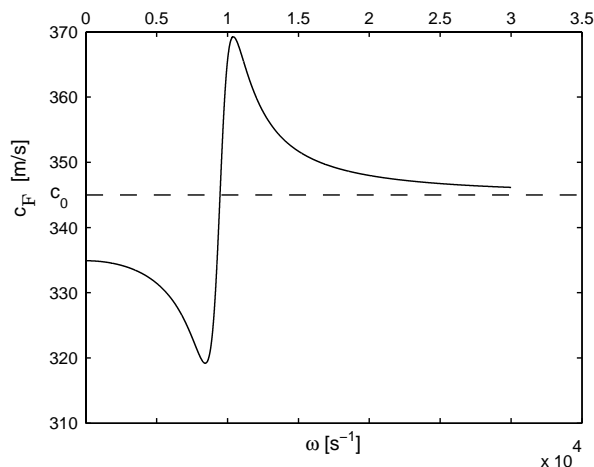
$$c_F = \frac{\omega}{\Re(k)} \simeq \frac{c_0}{1 + \frac{2\pi\rho_0 c_0^2 C_m [1 - (\omega/\omega_m)^2]}{[1 - (\omega/\omega_m)^2]^2 + R_m^2 C_m^2 \omega^2}}. \quad (15)$$

Pro koeficient útlumu  $\alpha$  můžeme psát

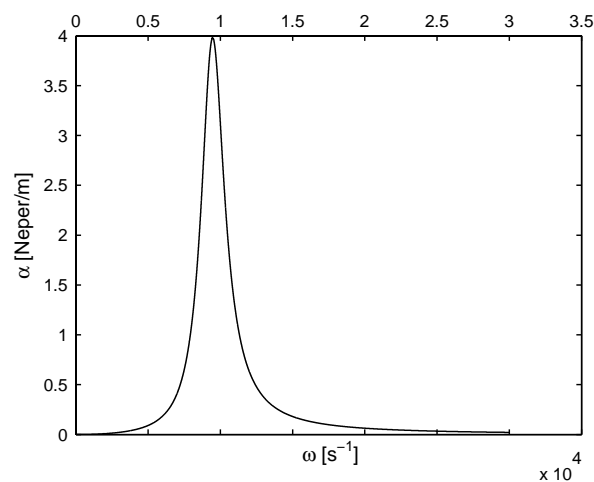
$$\begin{aligned} \alpha = -\Im(k) \simeq \\ \simeq \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} + \frac{2\pi\rho_0 c_0 R_m C_m^2 \omega^2}{[1 - (\omega/\omega_m)^2]^2 + R_m^2 C_m^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Předpokládejme, že pro veličiny charakterizující stěnu rezonátoru jsou splněny relace

$$\omega \ll \omega_m, \quad \omega R_m C_m \ll 1. \quad (17)$$



Obrázek 1: Závislost fázové rychlosti  $c_F$  na kmitočtu



Obrázek 2: Závislost koeficientu útlumu  $\alpha$  na kmitočtu



Lze potom dospět k následující modelové rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - (V - \Delta_s) \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma_s} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + D \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} = \sin(y), \quad (18)$$

kde

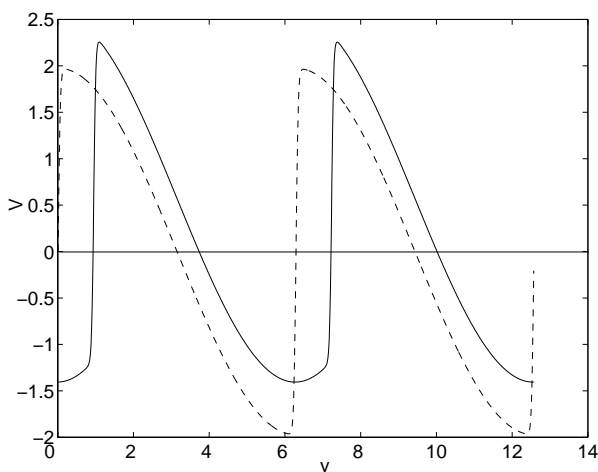
$$\Delta_s = \frac{2\pi\rho_0 c_0^3 C_m}{\beta v_0}, \quad D = \frac{2\pi\rho_0 c_0^3 \omega^2 C_m}{\beta v_0 \omega_m^2},$$

$$\Gamma_s = \frac{2\rho_0 c_0 v_0 \beta}{b\omega + 4\pi\rho_0 c_0^4 R_m C_m^2 \omega}. \quad (19)$$

Rovnice (19) představuje *nehomogenní Kortewegovu-de Vriesovu-Burgersovu (KdVB) rovnici*.

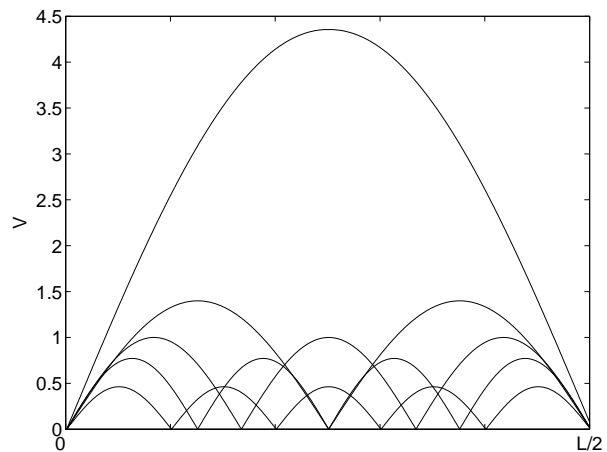
### 3. Analýza výsledků modelových rovnic

Modelová rovnice (11) byla řešena numericky v kmitočtové oblasti pomocí metody Runge-Kutta čtvrtého řádu. Z numerických výsledků je patrná skutečnost, že elasticita stěn způsobuje nesymetrii v řešení, viz obr. 3. Díky nelineárním interakcím dochází ke kaskádním procesům, kdy vznikají postupně vyšší harmonické složky. Rozložení jednotlivých harmonických složek podél rezonátoru je zachyceno na obrázku 4. V případě, že budeme budít stojaté vlny pístem

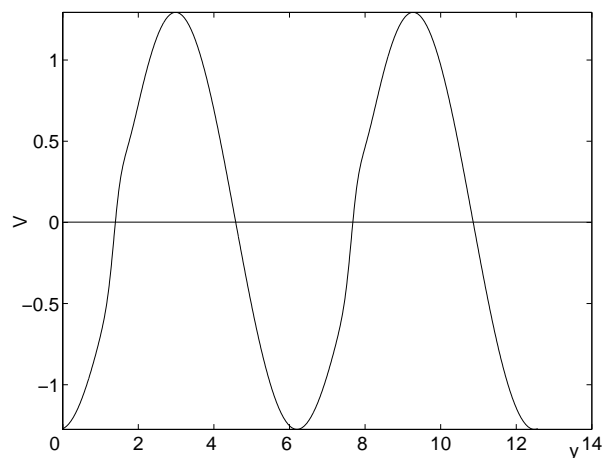


Obrázek 3: Řešení modelové rovnice pro elastický rezonátor (plná čára) a rezonátor s dokonale tuhými stěnami (přerušovaná čára)

kmitajícím na kmitočtu  $\omega = \omega_m/2$ , dojde díky kmitočtové závislosti koeficientu útlumu  $\alpha$  (viz obr. 2) k významnému útlumu druhé harmonické složky vlny, což vede k narušení kaskádních procesů, a tudíž vyšší harmonické složky budou dosahovat daleko menších amplitud vzhledem k amplitudě první harmonické. Díky této skutečnosti bude vlna zkreslena jen nepatrně, viz obrázek 5. Distribuce jednotlivých harmonických pro tento případ je patrná z obrázku 6. Jestliže budeme budít vlnu na kmitočtu výrazně vyšším než je rezonanční kmitočet  $\omega_m$ , potom se elastický rezonátor bude chovat jako rezonátor s dokonale tuhými stěnami, jelikož se disperze přestane téměř projevovat (viz obr. 1) a



Obrázek 4: Distribuce jednotlivých harmonických uvnitř elastického rezonátoru



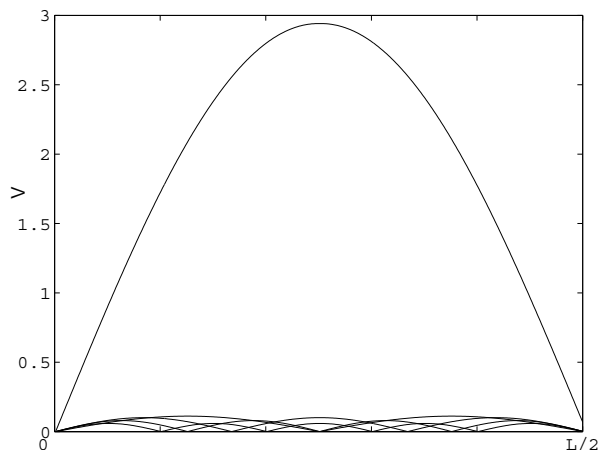
Obrázek 5: Řešení modelové rovnice pro elastický rezonátor buzený na kmitočtu  $\omega = \omega_m/2$

koeficient útlumu přestává být kmitočtově selektivní. Průběh takového řešení je na obrázku 7.

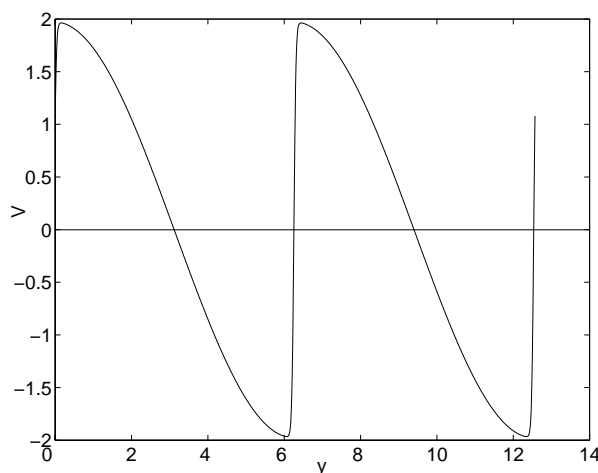
Na obrázku 8 jsou zachyceny časové průběhy stojaté vlny ve třech různých místech rezonátoru. Z odvozené nehomogenní Kortewegovy-de Vriesovy-Burgersovy rovnice (19) je zřejmé, že pružnost stěn rezonátoru způsobuje rozladění. Navíc tato rovnice ukazuje na fakt, že se v jistých případech bude řešení rozpadat na řadu solitonů, které se vůči sobě budou pohybovat, jelikož rychlost solitonu souvisí s jeho amplitudou.

### 4. Závěr

V článku byly prezentovány nově odvozené modelové rovnice, které mohou sloužit k popisu nelineárních stojatých vln uvnitř rezonátoru s pružnými stěnami. Na základě provedené analýzy jednotlivých řešení je patrná skutečnost, že při buzení elastického rezonátoru na kmitočtech výrazně převyšujících rezonanční kmitočet  $\omega_m$  je možné na takový rezonátor pohlížet jako na dokonale tuhý. Navíc při



Obrázek 6: Distribuce jednotlivých harmonických uvnitř elastického rezonátoru buzeného na kmitočtu  $\omega = \omega_m/2$

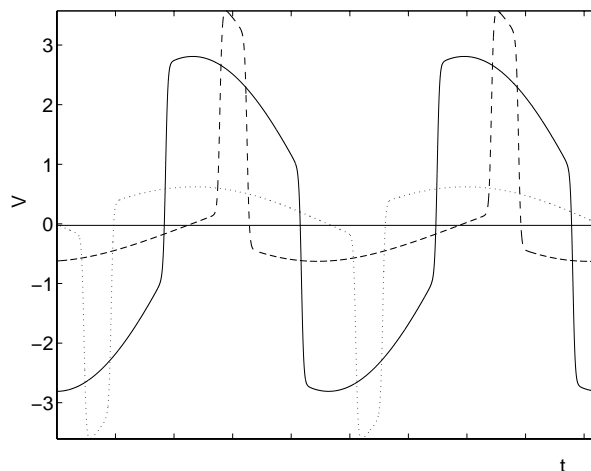


Obrázek 7: Řešení modelové rovnice pro elastický rezonátor buzený na kmitočtu  $\omega = 5\omega_m$

vhodném buzení je možné díky kmitočtové závislosti činitele útlumu efektivně potlačit vznik vyšších harmonických složek a tím zamezit zkreslení nelineární stojaté vlny.

## Poděkování

Tento příspěvek byl podporován výzkumným záměrem MSM 212 300 016.



Obrázek 8: Časové průběhy stojatých vln v elastickém rezonátoru v třech různých místech (tečkovaná čára –  $0,1L$ , plná čára –  $0,5L$ , přerušovaná čára –  $0,9L$ )

## Reference

- [1] M. Bednařík, M. Červenka, P. Koniček, Nonlinear standing waves in elastic resonators, *Proceeding of the 51-st Open Seminar on Acoustics*, 287–290, Gdaňsk, 2004.
- [2] V. P. Kuznetsov, Equations of Nonlinear Acoustics, *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467–470, 1971.
- [3] M. Bednařík, P. Koniček, Asymptotic solutions of the inhomogeneous Burgers equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **115**, 91–98, 2004.
- [4] V. E. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, S. Job, M. Bruneau, Enhancement of the  $Q$  of a nonlinear acoustic resonator by active suppression of harmonics, *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 3717–3720, 1998.
- [5] V. E. Gusev, Buildup of forced oscillations in acoustic resonator, *Sov. Phys. Acoust.* **30**, 121–125, 1984.



---

Akustické listy: ročník 10, číslo 4      prosinec 2004

ISSN: 1212-4702

Vydavatel: Česká akustická společnost, Technická 2, 166 27 Praha 6

Vytisklo: Ediční středisko ČVUT

Počet stran: 28

Počet výtisků: 200

Redakční rada: M. Brothánek, O. Jiříček, J. Kozák, R. Čmejla, F. Kadlec, J. Štěpánek, P. Urban

Jazyková úprava: R. Štěchová

Uzávěrka příštího čísla Akustických listů je 25. února 2005.

© ČsAS  
NEPRODEJNÉ!