

AKUSTICKÉ LISTY

České akustické společnosti

ročník 9, číslo 4

prosinec 2003

Obsah

Pozvánka na valnou hromadu	2
Pozvánka na WORKSHOP 2004 <i>Libor Husník</i>	2
Dynamika a termodynamika zvukového pole: linearizační neurčitosti Dynamics and Thermodynamics of the Sound Field: Linearization Uncertainties <i>Zdeněk Kyncl</i>	3
Asymptotická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice Asymptotic Solutions of the Inhomogeneous Burgers Equation <i>Michal Bednařík a Petr Koníček</i>	12
Selektivní potlačení harmonických v akustickém rezonátoru Selective Attenuation of Harmonics in Acoustical Resonator <i>Petr Koníček a Michal Bednařík</i>	17
Možnosti zdokonalení ultrazvukového termálního průtokoměru využitím metod Time Reversal Acoustic Ultrasonic Thermal Flowmeter Possible Improvements Utilize Time Reversal Acoustic <i>Jaroslav Plocek</i>	21

Rada České akustické společnosti svolává ve smyslu stanov

VALNOU HROMADU,

která se bude konat ve čtvrtek 29. ledna 2004 na fakultě elektrotechnické ČVUT, Technická 2, Praha 6 – Dejvice.

Rámcový program:

10:00 – 11:45 Jednání v odborných skupinách. Rozpis místností pro jednání v odborných skupinách bude vyvěšen ve vstupním prostoru fakulty a na dveřích sekretariátu společnosti, č. dveří 430

12:00 – 13:00 Prezentace

13:15 – 16:00 Plenární zasedání, místnost č. 337

Důležité upozornění: Člen společnosti, který se nebude moci valné hromady osobně zúčastnit, pověří jiného člena, aby jej zastupoval. Jeden člen společnosti může zastupovat nejvýše tři členy. Formulář pověření je součástí tohoto čísla Akustických listů.

České vysoké učení technické v Praze pořádá ve dnech **9. až 13. února 2004** odborný seminář **WORKSHOP 2004**, kde se formou posterů představí výsledky výzkumné činnosti v širokém spektru technických disciplín. Zájemci z praxe mohou navázat kontakty přímo s autory. Bližší informace na <http://workshop.cvut.cz>

Za organizační výbor
Libor Husník

Dynamika a termodynamika zvukového pole: linearizační neurčitosti

Zdeněk Kyncl

ČVUT – FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: kynclz@fel.cvut.cz

Based on both the Newton's law of motion and the equation of continuity, the Euler's equation of motion in the sound field is derived [4, 3, 5]. The first law of thermodynamics [6] is modified to the form expressing the thermodynamics of the sound field. Then both the Euler equation and the equation of continuity are linearized by omitting the convective derivatives while the first law of thermodynamics is linearized by omitting the heat exchange in the sound field. Finally some examples of uncertainties evaluation based on confrontation of the linearized approximate acoustical equations with the physical laws of dynamics and thermodynamics are presented.

1. ÚVOD

Exaktní matematické vyjádření spektrálních hustot integrálních veličin tranzientního zvukového pole [1] a limitní přechod k diskrétnímu spektru periodického zvuku [2] vychází z idealizovaného modelu zvukového pole, koncipovaného na lineárním adiabatickém přiblížení fyzikálních zákonů dynamiky a termodynamiky zvukového pole v ideálním plynu. Je zřejmé, že se linearizace fyzikálních zákonů projeví neurčitostmi, které mohou dosahovat při vysokých kmitočtech a vysokých akustických hladinách nezanedbatelných hodnot. Tyto neurčitosti nelze eliminovat žádnou statistickou metodou – je však nutné brát je v úvahu při analýze zvukového pole. K jejich stanovení použijeme metody konfrontace linearizovaných akustických rovnic s fyzikálními zákony dynamiky a termodynamiky zvukového pole. Proto věnujeme první kapitoly dynamické a termodynamické analýze zvukového pole. Na základě lineární adiabatické aproximace fyzikálních zákonů pak odvodíme rovnice idealizovaného modelu zvukového pole. Nakonec budeme na několika příkladech demonstrovat stanovení linearizačních neurčitostí metodou konfrontace linearizovaných akustických rovnic se zákony dynamiky a termodynamiky.

2. Dynamika zvukového pole

2.1. Kontinuální model prostředí

Při dynamické a termodynamické analýze zvukového pole budeme považovat vzduch, který je nositelem zvukového pole, za ideální plyn bez vnitřního tření, pro který platí Eulerova rovnice kontinuity [4, 5]

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \quad (1)$$

kde ϱ je časově proměnlivá hustota prostředí v daném bodě a \vec{v} je akustická rychlost, tj. rychlost pohybu hmotného elementu kontinua v daném bodě zvukového pole.

Kontinuální idealizace prostředí sice též do určité míry přispívá k neurčitostem lineárního adiabatického modelu

zvukového pole, ve většině praktických aplikací je tento příspěvek o několik řádů menší než ostatní linearizační neurčitosti, takže se ve výsledných neurčitostech neuplatní. Dostanou-li se však aplikace idealizovaného modelu do oblasti ultrazvuku, mohou neurčitosti kontinuálního modelu prostředí dosáhnout značně vysokých hodnot.

Vraťme se tedy k rovnici kontinuity. Časově proměnlivou hustotu prostředí v daném bodě $\varrho(\vec{r}, t)$ vyjádříme jako součet statické hustoty prostředí ϱ_s bez přítomnosti zvukového pole a akustického příspěvku k hustotě $\rho(\vec{r}, t)$:

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho_s + \rho(\vec{r}, t). \quad (2)$$

Rozvedeme-li v (1) levou stranu

$$\nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \varrho + \varrho \nabla \cdot \vec{v},$$

můžeme ji psát ve tvaru

$$-\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varrho \right). \quad (3)$$

Výraz $\vec{v} \cdot \nabla \varrho$ vyjadřuje konvektivní derivaci hustoty, takže substancionální derivace hustoty je

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varrho. \quad (4)$$

2.2. Pohybová rovnice hmotného elementu prostředí

Nechť počáteční stav prostředí je dán statickým tlakem b , statickou teplotou Θ_s a statickou hustotou ϱ_s . Šíří-li se tímto prostředím zvukové vlny, superponuje se na statický tlak b časově proměnlivý akustický tlak $p(\vec{r}, t)$, takže celkový tlak v bodě \vec{r} bude v čase t

$$p_c(\vec{r}, t) = b + p(\vec{r}, t). \quad (5)$$

V prostředí se vytvoří časově a prostorově proměnlivý gradient tlaku. Vzhledem k tomu, že statický tlak b je konstantní, je gradient celkového tlaku roven gradientu akustického tlaku

$$\text{grad} p_c(\vec{r}, t) = \text{grad} p(\vec{r}, t). \quad (6)$$

Každý hmotný element kontinua je tímto gradientem uveden do akustického pohybu, probíhajícího v okolí rovnovážné polohy, kterou zaujímal hmotný element před vybušením zvukového pole a do níž se vrátí po doznění zvuku. Zkoumejme dynamiku pohybu hmotného elementu o hmotnosti dm na elementární trajektorii $d\vec{r}_{dm}$, která prochází v okamžik t bodem zvukového pole o radiusvektoru \vec{r} a za elementární časový interval dt urazí elementární trajektorii $d\vec{r}_{dm}$, takže se posune do bodu o radiusvektoru $\vec{r} + d\vec{r}_{dm}$.

Stanovme elementární sílu $d\vec{F}(\vec{r}, t)$ vyvolanou gradientem akustického tlaku a působící na hmotný element dm .

Nechť je hmotný element dm umístěn v elementárním kvádru o hranách dx , dy , dz , takže jeho objem je

$$dV = dx dy dz.$$

Elementární sílu pak můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru

$$d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k}. \quad (7)$$

Přírůstky akustického tlaku $d_x p$, $d_y p$, $d_z p$ podél hran elementárního objemu $dV = dx dy dz$, v němž je uzavřen hmotný element dm , jsou

$$d_x p = \frac{\partial p}{\partial x} dx, \quad d_y p = \frac{\partial p}{\partial y} dy, \quad d_z p = \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Složky elementární síly (7) jsou pak dány elementárními tlakovými silami, vyvolanými na stěnách

$$dS_x = dy dz, \quad dS_y = dz dx, \quad dS_z = dx dy$$

poklesem akustického tlaku $-d_x p$, $-d_y p$, $-d_z p$ podél hran dx , dy , dz , tj.

$$\begin{aligned} dF_x &= -d_x p dS_x = -d_x p dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz, \\ dF_y &= -d_y p dS_y = -d_y p dz dx = -\frac{\partial p}{\partial y} dy dz dx, \\ dF_z &= -d_z p dS_z = -d_z p dx dy = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Dosadíme-li jednotlivé složky do (7), dostaneme po malé úpravě

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) dx dy dz = -\nabla p dV$$

vyjádření elementární síly působící na hmotný element ve tvaru

$$d\vec{F} = -\nabla p dV. \quad (9)$$

Na pohybující se hmotné elementy prostředí působí v reálném plynu kromě gradientní síly (9) též brzdící síly vnitřního tření [4, 5], které je nutno brát v úvahu při studiu

silně nelineárních polí [10]. V této stati se omezíme na zkoumání polí, v nichž brzdící síly jsou o několik řádů menší než zrychlující gradientní síly, takže jejich příspěvek k linearizačním neurčitostem je zanedbatelný.

Nechť se tedy hmotný element ideálního plynu dm , který byl v čase t v bodě o radiusvektoru \vec{r} , posune během elementární doby dt o elementární trajektorii $d\vec{r}_{dm}$. Dynamiku tohoto elementárního pohybu vyjadřuje 2. Newtonův pohybový zákon

$$d\vec{F}(\vec{r}, t) = dm \vec{a}_{dm}(\vec{r}, t), \quad (10)$$

kde \vec{a}_{dm} je zrychlení pohybu hmotného elementu prostředí dm na elementární trajektorii $d\vec{r}_{dm}$. Dosadíme-li do této rovnice podle (9), dostaneme 2. Newtonův pohybový zákon ve tvaru

$$-\nabla p(\vec{r}, t) dV = dm \vec{a}_{dm}(\vec{r}, t),$$

tj.

$$-\nabla p(\vec{r}, t) = \rho \vec{a}(\vec{r}, t), \quad (11)$$

kam jsme dosadili

$$dm = \rho dV.$$

Rychlost pohybu hmotného elementu kontinua dm (akustická rychlost) v daném bodě zvukového pole je

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}_{dm}}{dt} \quad (12)$$

a jeho zrychlení \vec{a}_{dm} při pohybu po trajektorii $d\vec{r}_{dm}$ je

$$\vec{a}_{dm}(t) = \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}. \quad (13)$$

Dosadíme-li tento výsledek do (11), dostaneme pohybovou rovnici hmotného elementu kontinua ve tvaru [4, 5]

$$-\nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (14)$$

Je zřejmé, že levá strana této rovnice $-\nabla p$ vyjadřuje objemovou hustotu urychlující síly $d\vec{F}$ vyvolané gradientem akustického tlaku a derivace $d\vec{v}/dt$ vyjadřuje zrychlení hmotného elementu kontinua způsobené touto silou. Jde tedy o substancionální derivaci, tj. o derivaci rychlosti pohybu hmotného elementu kontinua na trajektorii $d\vec{r}_{dm}$. Radiusvektor daného bodu zvukového pole \vec{r} je časově nezávislý a udává rovnovážnou polohu, v jejímž okolí se pohybuje hmotný element prostředí.

2.3. Substancionální derivace akustické rychlosti

Nechť tedy má v bodě o radiusvektoru \vec{r} pohyb hmotného elementu kontinua rychlost $\vec{v}(\vec{r}, t)$ a zrychlení $\vec{a}(\vec{r}, t)$. Za dobu dt se každý hmotný element posune o

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}. \quad (15)$$

Okamžitá rychlost hmotného elementu v tomto bodě pak bude v 1. řádu přiblížení

$$\begin{aligned}
& \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = \\
& = v_x(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)\vec{i} + \\
& + v_y(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)\vec{j} + \\
& + v_z(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)\vec{k} \doteq \\
& \doteq (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz + \frac{\partial v_x}{\partial t}dt)\vec{i} + \\
& + (v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz + \frac{\partial v_y}{\partial t}dt)\vec{j} + \\
& + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz + \frac{\partial v_z}{\partial t}dt)\vec{k} = \\
& = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} + dx\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + dt\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \\
& = \vec{v} + (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})\vec{v} + dt\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \\
& = \vec{v} + (d\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt.
\end{aligned}$$

Po uplynutí času dt tedy hmotný element kontinua urazil elementární trajektorii $d\vec{r}$ a získal rychlost

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = \vec{v} + (d\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt. \quad (16)$$

Dosadíme-li tento výsledek do substancionální derivace rychlosti

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}, \quad (17)$$

dostaneme vyjádření

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \quad (18)$$

kde $\partial \vec{v} / \partial t$ je lokální derivace a $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ je konvektivní příspěvek k derivaci akustické rychlosti, vyjadřující rozdíl mezi substancionální a lokální derivací, způsobený posunutím hmotného elementu prostředí o $d\vec{r}$ [5].

Po dosazení do (14) dostaneme Eulerovu pohybovou rovnici [5]:

$$-\nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right). \quad (19)$$

3. Termodynamika zvukového pole

Analogicky k vyjádření tlaku (5) a hustoty (2) vyjádříme teplotu prostředí $\Theta(\vec{r}, t)$ v daném bodě pole jako součet statické teploty prostředí Θ_s a akustické časově proměnlivé složky teploty $\theta(\vec{r}, t)$:

$$\Theta(\vec{r}, t) = \Theta_s + \theta(\vec{r}, t). \quad (20)$$

Předpokládejme, že pro vzduch, v němž zkoumáme zvukové pole, platí stavová rovnice [6]

$$bV = \frac{m}{M}R\Theta_s,$$

kterou můžeme psát ve tvaru

$$\frac{b}{\rho_s} = \frac{R}{M}\Theta_s, \quad \text{kam jsme dosadili } \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho_s}.$$

Tato rovnice zřejmě platí i pro časově proměnlivou teplotu prostředí $\Theta(\vec{r}, t)$ v daném bodě pole, tj.

$$\frac{b+p}{\rho} = \frac{R}{M}\Theta. \quad (21)$$

Derivujeme tuto rovnici podle času

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \rho - (b+p) \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{R}{M} \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (22)$$

Z této rovnice je zřejmé, že ve zvukovém poli je časově i prostorově proměnný gradient teploty, který je doprovázen přenosem tepla mezi sousedními hmotnými elementy prostředí. V popisu tohoto procesu vyjdeme z prvního zákona termodynamiky [6]. Nejprve vyjádříme specifický tepelný příkon hmotného elementu prostředí, vyvolaný gradientem teploty.

3.1. Specifický tepelný příkon hmotného elementu

Gradient teploty způsobí měrný tepelný tok \vec{q} [6]

$$\vec{q} = -\ell \nabla \Theta, \quad (23)$$

kde ℓ je součinitel tepelné vodivosti vzduchu. Mezi daným hmotným elementem prostředí a jeho okolím dochází k tepelné výměně, přičemž

$$-\nabla \cdot \vec{q} = \ell \nabla \cdot \nabla \Theta = \ell \Delta \Theta \quad (24)$$

udává tepelný příkon z okolního prostředí do hmotného elementu dm , vztažený k jednotce objemu. Při formulaci prvního principu termodynamiky zvukového pole budeme vztahovat tepelný příkon hmotného elementu dm k jednotce hmotnosti. Toho dosáhneme vydělením divergence měrného toku (24) hustotou. Tuto veličinu budeme značit μ a nazývat *specifický tepelný příkon* hmotného elementu dm :

$$\mu = \frac{\ell}{\rho} \Delta \Theta. \quad (25)$$

3.2. Specifická vnitřní energie hmotného elementu

Je zřejmé, že se specifický tepelný příkon μ projeví v časových změnách specifické vnitřní energie hmotného elementu dm

$$\varepsilon = \frac{C_V}{M} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (26)$$

a v práci konané objemovou expanzí hmotného elementu dm , C_V je izochorická molární tepelná kapacita.

3.3. Specifický výkon expanze prostředí

Se změnou hustoty ϱ v daném bodě pole se mění měrný objem $1/\varrho$, takže působením tlaku $b + p$ koná plyn při expanzi práci. Specifickou objemovou expanzi hmotného elementu dm vyjádříme jako derivaci specifického objemu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho} \right) = -\frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (27)$$

Vynásobíme-li specifickou objemovou expanzi hmotného elementu dm tlakem $b + p$, při němž tato expanze probíhá, dostaneme specifický výkon expanze

$$\alpha = -\frac{b+p}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (28)$$

3.4. První princip termodynamiky zvukového pole

Při studiu neurčitostí lineárního modelu zvukového pole zanedbáme síly vnitřního tření, neboť neurčitost tohoto zanedbání je o několik řádů menší než neurčitosti lineární. Kvizistacionární vyjádření prvního principu termodynamiky [6] pak můžeme modifikovat na akustické vyjádření tak, že teplo přecházející do daného hmotného elementu z okolního prostředí vyjádříme specifickým tepelným příkonem μ , akustické změny vnitřní energie vyjádříme časovou derivací specifické vnitřní energie ε a práci plynu konanou působením tlaku při expanzi vyjádříme specifickým výkonem expanze hmotného elementu prostředí α

$$\mu = \varepsilon + \alpha, \quad (29)$$

tj. podle (25), (26), (28)

$$\frac{\ell}{\varrho} \Delta \Theta = \frac{C_V}{M} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{b+p}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t}, \quad (30)$$

kde C_V je izochorická molární tepelná kapacita. Je zřejmé, že jednotkou μ , ε i α je

$$[\mu] = [\varepsilon] = [\alpha] = \text{W kg}^{-1}.$$

4. Lineární adiabatický model zvukového pole

4.1. Linearizace Eulerovy rovnice

V akustické praxi se obvykle používá linearizovaná Eulerova pohybová rovnice (19), kterou získáme zanedbáním konvektivní derivace akustické rychlosti $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ proti lokální derivaci a zanedbáním akustických časových změn hustoty $\rho(\vec{r}, t)$ proti statické hustotě prostředí ϱ_s :

$$-\nabla p = \varrho_s \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (31)$$

4.2. Linearizace rovnice kontinuity

Zanedbáme-li v rovnici kontinuity (3) konvektivní derivaci hustoty $\vec{v} \cdot \nabla \rho$ proti lokální derivaci a časové akustické změny hustoty $\rho(\vec{r}, t)$ v (2) proti statické hustotě prostředí ϱ_s , obdržíme linearizovanou rovnici kontinuity

$$-\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\varrho_s} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (32)$$

4.3. Adiabatické přiblížení zvukového pole

Lineární adiabatickou aproximací prvního principu termodynamiky získáme zanedbáním specifického tepelného příkonu $\rho(\vec{r}, t)$ (25) proti časové derivaci specifické vnitřní energie hmotného elementu $\varepsilon(\vec{r}, t)$ (26), přičemž zanedbáme akustický tlak $p(\vec{r}, t)$ proti statickému tlaku b a akustické změny hustoty prostředí $\rho(\vec{r}, t)$ proti hustotě statické ϱ_s :

$$0 = \frac{C_V}{M} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{b}{\varrho_s^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (33)$$

Vyloučíme-li z rovnice adiabaty (33) časovou derivaci teploty dosazením podle stavové rovnice (22), dostaneme

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{R + C_V}{C_V} \frac{b}{\varrho_s} \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (34)$$

Dosadíme-li podle Mayerova vztahu

$$C_p = C_V + R \quad (35)$$

a vyjádříme-li adiabatický exponent

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V}, \quad (36)$$

dostaneme linearizovanou rovnici adiabaty

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\varrho_s}{\varkappa b} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (37)$$

která vyjadřuje akustický příspěvek k hustotě prostředí v lineárním zvukovém poli pomocí akustického tlaku. Tuto rovnici lze pak podle (2) linearizovat zanedbáním $p(\vec{r}, t)$ proti b a $\rho(\vec{r}, t)$ proti ϱ_s

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\varrho_s}{\varkappa b} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (38)$$

Po integraci dostaneme

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\rho_s}{\varkappa b} p(\vec{r}, t). \quad (39)$$

Vyloučíme-li z rovnice adiabaty (33) časovou derivaci hustoty dosazením podle stavové rovnice (22) a dosadíme-li za $(C_V + R)$ podle (35) a (36), dostaneme

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{M}{\varkappa \rho_s C_V} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (40)$$

Podle (20) můžeme rovnici (40) psát ve tvaru

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{M}{\varkappa \rho_s C_V} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (41)$$

resp. po integraci

$$\theta(\vec{r}, t) = \frac{M}{\varkappa \rho_s C_V} p(\vec{r}, t). \quad (42)$$

4.4. Vlnové rovnice idealizovaného zvukového pole

Jak bylo naznačeno v úvodu, je metoda stanovení linearizačních neurčitostí budována na konfrontaci idealizovaného lineárního modelu zvukového pole se zákony dynamiky a termodynamiky. Základní rovnice, z nichž tato metoda vychází, jsou vlnové rovnice idealizovaného modelu zvukového pole pro akustický tlak a akustickou rychlost. Jejich odvození vychází z linearizované Eulerovy pohybové rovnice (31)

$$-\nabla p = \rho_s \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

a linearizované rovnice kontinuity (32), z níž je dosazením linearizované rovnice adiabaty (37) eliminována hustota:

$$-\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\varkappa b} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (43)$$

Tyto rovnice tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých p a \vec{v} . Aplikujeme-li na (31) operátor ∇ a derivujeme-li (43) podle času

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \rho_s \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \\ -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{1}{\varkappa b} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

a dosadíme-li z druhé rovnice do první za $\nabla \cdot \partial \vec{v} / \partial t$, dostaneme vlnovou rovnici pro akustický tlak

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (44)$$

kde

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{b}{\rho_s}} \quad (45)$$

je rychlost zvukových vln v idealizovaném zvukovém poli. Podobně odvodíme vlnovou rovnici pro akustickou rychlost. Derivujeme-li (31) podle času a aplikujeme-li na (43) operátor ∇ , dostaneme

$$-\nabla \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{1}{\varkappa b} \nabla \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé za $\nabla \partial p / \partial t$, dostaneme

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \frac{\rho_s}{\varkappa b} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}. \quad (46)$$

Za výraz $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ dosadíme podle známé identity

$$\text{rot rot } \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}.$$

V kontinuálním modelu považujeme vzduch za ideální plynné kontinuum bez vnitřního tření, takže zvukové pole v tomto prostředí můžeme považovat za nevírové:

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \Delta \vec{v}. \quad (47)$$

Po dosazení (47) do (46) dostaneme vlnovou rovnici pro akustickou rychlost idealizovaného lineárního adiabatického zvukového pole

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}, \quad (48)$$

opět jsme dosadili podle (45). Dosadíme-li do (45) podle stavové rovnice (21), dostaneme vyjádření závislosti rychlosti zvuku na teplotě

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{R}{M}} \Theta_s. \quad (49)$$

4.5. Idealizovaný zákon zachování akustické energie

Vraťme se ještě k soustavě rovnic (31) a (43)

$$\begin{aligned} -\nabla p &= \rho_s \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ -\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\varkappa b} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned}$$

Vynásobme (31) skalárně vektorem $-\vec{v}$ a rovnicí (43) vynásobme skalárem $-p$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla p &= -\rho_s \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ p \nabla \cdot \vec{v} &= -\frac{1}{\varkappa b} p \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

a obě rovnice sečtěme

$$p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla p = -\rho_s \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa b} p \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Dosadíme-li za levou stranu výsledné rovnice podle identity

$$\operatorname{div}(p\vec{v}) = p\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla p$$

a pravou stranu upravíme podle

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad p\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial t},$$

dostaneme po malé úpravě důležitý vztah

$$\operatorname{div}(p\vec{v}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_s v^2 + \frac{1}{2\rho_s c^2}p^2\right). \quad (50)$$

Je zřejmé, že první výraz v závorce na pravé straně vyjadřuje hustotu kinetické energie akustické rychlosti v daném bodě idealizovaného lineárního adiabatického zvukového pole

$$w_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\rho_s v^2(\vec{r}, t) \quad (51)$$

a druhý výraz

$$w_p(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\rho_s c^2}p^2(\vec{r}, t) \quad (52)$$

vyjadřuje hustotu potenciální energie akustického tlaku v tomto bodě [8, 7].

Celý výraz v závorce na pravé straně rovnice (50) tedy vyjadřuje hustotu energie idealizovaného lineárního adiabatického zvukového pole v bodě \vec{r}

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\rho_s v^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\rho_s c^2}p^2(\vec{r}, t). \quad (53)$$

Výraz $p\vec{v}$ v závorce na levé straně rovnice (50) vyjadřuje měrný tok akustické energie (akustickou energii, která protéče v daném bodě jednotkou plochy za jednotku času – okamžitou akustickou intenzitu) [8]

$$\vec{N}(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t). \quad (54)$$

Rovnici (50) pak můžeme psát ve tvaru

$$\operatorname{div}\vec{N} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (55)$$

který vyjadřuje rovnici kontinuity toku akustické energie, tj. zákon zachování akustické energie v idealizovaném lineárním adiabatickém zvukovém poli.

5. Lineární adiabatický model postupné rovinné harmonické vlny

Základní informaci o neurčitostech idealizovaného lineárního adiabatického modelu zvukového pole budeme hledat v jeho modifikaci pro idealizované pole postupné rovinné harmonické vlny – viz vztah (45) v [2]. Připomeňme základní rovnice tohoto modelu.

5.1. Idealizovaná postupná rovinná harmonická vlna

Zvolme souřadnicový systém tak, aby vlnoplocha byla rovnoběžná s rovinou (y, z) . Idealizované vlnové rovnice (44) a (48) se pak zjednoduší na

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}. \quad (57)$$

Probíhá-li vlnový děj ve volném prostoru a kmitající rovina generuje rovinnou harmonickou vlnu, lze řešení rovnic (56) a (57) vyjádřit ve tvaru

$$p = p_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right), \quad (58)$$

$$v_x = v_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right), \quad (59)$$

kde rychlost šíření c idealizované lineární adiabatické postupné rovinné vlny udává (45).

5.2. Linearizovaná Eulerova rovnice pro rovinnou harmonickou vlnu

Dosadíme do linearizované Eulerovy rovnice (31) řešení vlnových rovnic (58) a (59). Po zkrácení goniometrických funkcí, dosazení podle (68), (69) a po malé úpravě dostaneme linearizovanou Eulerovu rovnici ve tvaru

$$\frac{p_{\text{ef}}}{v_{\text{ef}}} = \rho_s c, \quad (60)$$

který definuje idealizovanou vlnovou impedanci prostředí.

5.3. Linearizovaná rovnice kontinuity pro rovinnou harmonickou vlnu

Vzhledem k (39) můžeme vyjádřit šíření zhuštění a zředění v poli idealizované postupné rovinné harmonické vlny ve tvaru

$$\rho = \rho_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right). \quad (61)$$

Dosadíme-li toto vyjádření a vyjádření akustické rychlosti (59) do linearizované rovnice kontinuity (32), dostaneme po malé úpravě vyjádření linearizované rovnice kontinuity pro rovinnou harmonickou vlnu

$$v_m = \frac{c}{\rho_s}\rho_m. \quad (62)$$

5.4. Šíření teplotní vlny

Dosazením (58) do (42) dostaneme rovnici šíření teplotní vlny

$$\theta = \frac{M}{\rho_s \kappa C_s} p_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right). \quad (63)$$

5.5. Hustota akustické energie idealizované rovinné harmonické vlny

Dosadíme-li (59) do (51), dostaneme vyjádření hustoty kinetické akustické energie

$$w_k(x, t) = \frac{1}{2} \rho_s v_m^2 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) \quad (64)$$

a dosazením (58) do (52) získáme vyjádření hustoty potenciální akustické energie

$$w_p(x, t) = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho_s c^2} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right). \quad (65)$$

Střední hodnota hustoty kinetické akustické energie je

$$\bar{w}_k = \frac{1}{2} \rho_s v_m^2 \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) dt = \frac{1}{2} \rho_s v_{\text{ef}}^2 \quad (66)$$

a střední hodnota hustoty potenciální akustické energie je

$$\bar{w}_p = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho_s c^2} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) dt = \frac{p_{\text{ef}}^2}{2 \rho_s c^2}, \quad (67)$$

kde v_{ef} a p_{ef} jsou efektivní hodnoty akustické rychlosti a akustického tlaku:

$$v_{\text{ef}}^2 = v_m^2 \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) dt = \frac{v_m^2}{2}, \quad (68)$$

$$p_{\text{ef}}^2 = p_m^2 \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) dt = \frac{p_m^2}{2}. \quad (69)$$

Střední hustota akustické energie postupné rovinné harmonické vlny je pak podle (53) dána součtem (67) a (66)

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho_s v_{\text{ef}}^2 + \frac{p_{\text{ef}}^2}{2 \rho_s c^2}. \quad (70)$$

Střední hustotu celkové akustické energie idealizované postupné rovinné harmonické vlny (70) lze za použití lineární Eulerovy rovnice (60) vyjádřit buď pomocí akustického tlaku, nebo akustické rychlosti:

$$\bar{w} = \frac{p_{\text{ef}}^2}{\rho_s c^2} = v_{\text{ef}}^2 \rho_s. \quad (71)$$

Vidíme, že se na hustotě akustické energie idealizované rovinné postupné vlny podílí rovným dílem kinetická a potenciální akustická energie. O neurčitost tohoto oblíbeného vyjádření se rovněž budeme zajímat.

5.6. Intenzita toku akustické energie v postupné rovinné harmonické vlně

Dosadíme do (54) podle (58), (59) a (60)

$$\vec{N}(x, t) = \vec{i} \frac{p_m^2}{\rho_s c} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right). \quad (72)$$

Intenzitu toku akustické energie vyjádříme jako střední hodnotu měrného toku akustické energie

$$\vec{I} = \vec{i} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \vec{N} dt.$$

Po integraci dostaneme podle (69) známé vyjádření intenzity idealizované rovinné postupné harmonické vlny

$$\vec{I} = \vec{i} \frac{p_{\text{ef}}^2}{\rho_s c}. \quad (73)$$

Dosazením podle (71) lze intenzitu idealizované rovinné vlny vyjádřit pomocí střední hustoty akustické energie \bar{w}

$$\vec{I} = \vec{i} c \bar{w}. \quad (74)$$

6. Neurčitosti lineárního adiabatického modelu zvukového pole

Nakonec budeme na několika příkladech demonstrovat stanovení linearizačních neurčitostí metodou konfrontace lineárnizovaných akustických rovnic se zákony dynamiky a termodynamiky [11].

6.1. Neurčitost linearizované Eulerovy pohybové rovnice

Dosadíme řešení vlnových rovnic pro rovinnou harmonickou vlnu (58) a (59) do nelinearizované Eulerovy rovnice (19). Po zkrácení goniometrických funkcí, dosazení podle (69), (68) a malé úpravě dostaneme Eulerovu rovnici ve tvaru, který vyjadřuje neurčitost vlnové impedance (60):

$$\frac{p_{\text{ef}}}{v_{\text{ef}}} = \rho_s c \left[1 - \frac{v_m}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right) \right], \quad (75)$$

resp.

$$\frac{p_{\text{ef}}}{v_{\text{ef}}} = \rho_s c \left(1 \pm \frac{v_m}{c} \right). \quad (76)$$

6.2. Neurčitost hustoty akustické energie

Jak plyne z (71), podílí se na hustotě akustické energie idealizované postupné rovinné harmonické vlny rovným dílem kinetická a potenciální energie. Prozkoumejme neurčitost tohoto vyjádření.

Střední hustotu akustické energie \bar{w} vyjádříme podle (70) jako součet střední hustoty kinetické (66) a potenciální (67):

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_s c^2} p_{ef}^2 + \frac{1}{2} \rho_s v_{ef}^2. \quad (77)$$

Vztah mezi p_{ef} a v_{ef} však v tomto případě není dán Eulerovou linearizovanou pohybovou rovnicí (60), nýbrž neurčitou formulí (76). Vyjádříme-li z formule (76) akustický tlak

$$p_{ef}^2 = v_{ef}^2 (\rho_s c)^2 \left(1 \pm 2 \frac{v_m}{c}\right) \quad (78)$$

a dosadíme ho do (77), dostaneme

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_s c^2} v_{ef}^2 (\rho_s c)^2 \left(1 \pm 2 \frac{v_m}{c}\right) + \frac{1}{2} \rho_s v_{ef}^2,$$

kde jsme zanedbali neurčitost druhého řádu. Po malé úpravě pak obdržíme vyjádření neurčitosti střední hustoty akustické energie (66) ve tvaru

$$\bar{w} = \rho_s v_{ef}^2 \left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right), \quad (79)$$

který lze převést na tvar

$$\bar{w} = \frac{1}{\rho_s c^2} p_{ef}^2 \left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right). \quad (80)$$

6.3. Neurčitost akustické intenzity

Vyjádření neurčitosti akustické intenzity získáme dosazením (76) do (73):

$$\vec{I} = \vec{i} \frac{p_{ef}^2}{\rho_s c} \left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right). \quad (81)$$

K témuž výsledku vede dosazení (80) do (74).

6.4. Neurčitost linearizované rovnice kontinuity

Dosaďme do nelinearizované rovnice kontinuity (3) šíření zhuštění a zředění (61). Po malé úpravě dostaneme vyjádření neurčitosti linearizované rovnice kontinuity:

$$v_m = \frac{c}{\rho_s} \rho_m \left[1 - \frac{v_m}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\right)\right], \quad (82)$$

resp.

$$v_m = \frac{c}{\rho_s} \rho_m \left(1 \pm \frac{v_m}{c}\right). \quad (83)$$

6.5. Neurčitost adiabatické aproximace prvního principu termodynamiky

Neurčitost adiabatické aproximace prvního principu termodynamiky (30) vyjádříme poměrem amplitud specifického tepelného příkonu μ_m a časové derivace specifické vnitřní energie ε_m . Měrný tepelný příkon v poli rovinné harmonické vlny stanovíme dosazením (63) do (25). Nejdříve vyjádříme (25) pro rovinnou vlnu

$$\mu = \frac{\ell}{\rho_s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (84)$$

Dosaďme-li do této rovnice (63), dostaneme časový průběh specifického tepelného příkonu

$$\mu = \mu_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi + \pi\right), \quad (85)$$

kde

$$\mu_m = p_m \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\ell M}{\varkappa \rho_s^2 C_V} \quad (86)$$

je jeho amplituda. Dosaďme-li (63) do (26), dostaneme vyjádření časové derivace specifické vnitřní energie ε v poli rovinné harmonické vlny

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \pi\right), \quad (87)$$

kde

$$\varepsilon_m = p_m \frac{\omega}{\varkappa \rho_s} \quad (88)$$

je jeho amplituda.

Nyní můžeme vyjádřit neurčitost adiabatického přiblížení zvukového pole poměrem amplitud μ_m a (88)

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon_m} = \frac{2\pi \ell M}{\varkappa b C_V} f. \quad (89)$$

Vzhledem k tomu, že má vzduch dvouatomové molekuly, můžeme dosadit

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad \varkappa = \frac{7}{5}, \quad \varkappa C_V = \frac{7}{2} R,$$

takže

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon_m} = \frac{4\pi \ell M}{7bR} f. \quad (90)$$

Je zřejmé, že neurčitost adiabatického přiblížení s rostoucím kmitočtem roste. Zavedeme-li kritický kmitočet

$$f_{\text{krit}} = \frac{7bR}{4\pi \ell M}, \quad (91)$$

můžeme relativní neurčitost adiabatické aproximace prvního principu termodynamiky vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon_m} = \frac{f}{f_{\text{krit}}}. \quad (92)$$

Dosaďme-li do (91) konstanty pro vzduch za normálních podmínek

$$R = 8314 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}, \quad M = 28,5 \text{ kg kmol}^{-1},$$

$$\ell = 0,025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$$\varkappa = 1,4, \quad b = 101 \text{ kPa}, \quad c = 344 \text{ ms}^{-1},$$

dostaneme

$$f_{\text{krit}} = 6,56 \cdot 10^8 \text{ Hz.} \quad (93)$$

Odpovídající hypotetická vlnová délka je

$$\lambda_{\text{krit}} = \frac{c}{f_{\text{krit}}} = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m.} \quad (94)$$

Z kinetické teorie plynů je zřejmé [9], že kritická vlnová délka je řádově rovna střední volné dráze molekul vzduchu za normálních podmínek a kritický kmitočet je řádově roven srážkové frekvenci molekul vzduchu.

Je tedy zřejmé, že na kmitočtech blízkých kritickému kmitočtu se vzduch přestává chovat jako kontinuum. Všechny rovnice formulované pro kontinuum přestávají platit. Šíření zvukových vln za těchto podmínek je silně narušeno pohybem molekul. Vlnová rovnice neplatí.

V pásmu audiokmitočtů je podle (92) neurčitost kontinuačního modelu zanedbatelná:

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon_m} \approx 10^{-5}, \quad f_{\text{max}} = 20 \text{ kHz.}$$

7. Závěr

Linearizační neurčitosti vlnové impedance prostředí (76), střední hustoty akustické energie (80), akustické intenzity (81), rovnice kontinuity (83), adiabatické aproximace prvního zákona termodynamiky (90) a kontinuálního modelu prostředí (92) stanovené pro idealizované zvukové pole postupně rovinné harmonické vlny metodou konfrontace linearizovaných akustických rovnic (58) – (74) s fyzikálními zákony dynamiky a termodynamiky zvukového pole (1) – (30) signalizují, že jejich znalost má základní význam při analýze zvukového pole pomocí linearizovaných akustických rovnic. Vzhledem k tomu, že linearizační neurčitosti nelze statisticky eliminovat, je účelné vyhodnotit je dříve, než se pustíme do pracné statistické analýzy mnohočetných experimentů. Může se stát, že statisticky vyhodnocená chyba měření bude podstatně menší než linearizační neurčitost. V takovém případě je chyba měření zcela polhčena linearizační neurčitostí.

Linearizační neurčitosti pro jiný typ pole určíme podle stejné procedury. Řešení vlnových rovnic (44), (48) dosadíme do příslušných nelinearizovaných fyzikálních rovnic z nabídky (1) – (30) a po malé úpravě obdržíme kýžené neurčitosti.

Pokud se čtenář zajímá o exaktní řešení problémů, které vykazují za použití idealizovaného lineárního modelu zvukového pole příliš velké neurčitosti, může najít poučení např. ve stati [10].

Poděkování

Tento výzkum je podporován výzkumným záměrem číslo J04/98:212300016.

Reference

- [1] Kyncl, Z., O tranzientních spektrálních hustotách, Akustické listy ČsAS, 7(4), 2001, 14–18
- [2] Kyncl, Z., Limitní přechod od tranzientních spektrálních hustot k diskrétnímu spektru periodického zvuku, Akustické listy ČsAS, 8(4), 2002, 5–11
- [3] Skudrzyk, E., The Foundations of Acoustics, New York, Dover Publ., Springer Verlag, Wien, New York, 1971, 188–200, 489–510
- [4] Lord Rayleigh, The Theory of Sound, New York, Dover Publ., 1945, 1st Amer. edit., vol. II, 1–28
- [5] Brdička, M., Mechanika kontinua, Nakl. ČSAV, 1959, 395–422
- [6] Závaška, F., Thermodynamika, JČMF, Praha, 1950
- [7] Morse, P. M., Ingard, K.U., Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, 1968, 241
- [8] Fahy, F. J., Sound Intensity, Elsevier appl. Sc., 1989
- [9] Závaška, F., Kinetická teorie plynů, Vědecké vydavatelství, Praha, 1951
- [10] Bednařík, M., Koniček, P., Propagation of Quasi Plane Nonlinear Waves in Tubes and The Approximate Solutions of The Generalized Burgers Equation, The Journal of The Acoustical Society of America 2002, vol.112, no.1, 91–98
- [11] Kyncl, Z., On Uncertainties of Acoustical Equations, Proc. 36th Conference on Acoustics ČsAS, Kouty 2000, 66–73

Asymptotická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice

Michal Bednařík a Petr Koníček

ČVUT – FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: [bednarik,konicek]@fel.cvut.cz

Consistent with the second-order nonlinear theory, acoustic fields in the resonator can be represented by counter-propagating waves which are assumed to not interact in the resonator volume. These waves are coupled only by boundary conditions. If we suppose that the waves are slowly varying in space and in time it is possible to describe the waves by means of the inhomogeneous Burgers equation. When the exciting piston radiates more than one eigen-frequency of the resonator one can control generation of harmonics. Assuming that the piston radiates only the fundamental and second eigen-frequency it is possible to get the Whittaker-Hill equation by means of the Cole-Hopf transformation for steady-state waves. New asymptotic solution of this equation is presented in this work. The approximate solution, which enables to describe nonlinear standing waves in the resonator, is compared with numerical one and its validity limits are also discussed in this work.

1. Úvod

V souladu s nelineární teorií druhého řádu mohou být akustická pole v rezonátoru reprezentována dvěma proti sobě běžícími vlnami, přičemž se předpokládá, že tyto vlny spolu neinteragují. Tyto vlny jsou pouze svázané okrajovými podmínkami na stěnách rezonátoru. V případě, že předpokládáme, že tyto vlny mění svůj tvar v prostoru a čase jen nepatrně, je možné k jejich popisu použít tzv. nehomogenní Burgersovy rovnice. V případě, že budící píst, jenž tvoří jednu ze stěn rezonátoru, kmitá na více než jedné vlastní frekvenci, je možné s jeho pomocí řídit generování vyšších harmonických složek a tím ovlivňovat vliv tzv. nelineárního útlumu. Při potlačení nelineárního útlumu se zamezuje vzniku saturačního efektu a v rezonátoru je možné vybudit nelineární stojaté vlny velmi vysokých amplitud. Takovéto vlny pak nacházejí nemalé uplatnění v řadě akustických zařízení, viz např. [1].

V tomto článku prezentujeme asymptotické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice a porovnáváme ho s řešením numerickým. Na asymptotickém řešení je možné demonstrovat mechanismy potlačení generace vyšších harmonických složek za současného růstu amplitudy nelineární stojaté vlny.

2. Odvození nehomogenní Burgersovy rovnice

K popisu nelineárních stojatých vln v rezonátorech konstantního průřezu můžeme použít tzv. Kuzněcovovy rovnice (viz [6]), která představuje modelovou rovnici pro rychlostní potenciál ϕ v druhém přiblížení

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = \quad (1)$$

$$\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3},$$

kde x je prostorová souřadnice ve směru osy rezonátoru, t je čas, c_0 rychlost šíření zvukových vln v lineárním přiblížení, ρ_0 je hustota prostředí nenarušeného zvukovou vlnou, $\gamma = c_p/c_v$ je Poissonovo číslo, c_p a c_v jsou měrná tepla při konstantním tlaku a objemu, $b = \rho_0 \delta$, kde δ je koeficient difuze (viz např. [7]).

V rezonátoru si můžeme představit zvukové pole jako superpozici dvou prostých vln, které se šíří proti sobě, přičemž se v souladu s nelineární teorií druhého řádu předpokládá, že tyto vlny spolu neinteragují a jsou svázané pouze okrajovými podmínkami na stěnách rezonátoru, viz [3]. Dalším možným zjednodušením v rámci nelineární teorie druhého řádu je zanedbání skutečnosti, že se současně s pohybem budícího pístu mění délka rezonátoru. Předpokládáme-li, že s časem i se vzdáleností se mění tvar proti sobě běžících vln jen nepatrně, je možné hledat řešení rovnice (1) v následujícím tvaru

$$\phi = \left[\mu \phi_+ \left(\mu x, \mu t, \tau_+ = t - \frac{x}{c_0} \right) - \mu \phi_- \left(\mu x, \mu t, \tau_- = t + \frac{x}{c_0} \right) \right], \quad (2)$$

kde μ je malý bezrozměrný parametr. Dosadíme-li výraz (2) do rovnice (1) a zanedbáme-li členy řádu tři a vyšší (v souladu s nelineární teorií druhého řádu) a budeme-li předpokládat, jak již výše bylo zmíněno, že proti sobě běžící vlny spolu neinteragují, dospějeme k následujícím rovnicím (podobně např. [5])

$$\pm c_0 \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\pm}}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0} v_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 v_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}^2}. \quad (3)$$

Pro akustickou rychlost můžeme psát, že

$$v = v_+ - v_-, \quad (4)$$

kde v_+ a v_- jsou řešení rovnice (3). Označíme-li délku rezonátoru konstantního průřezu jako L , potom pro jeho vlastní kruhové frekvence ω_n platí vztah

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

V případě, že uvažujeme o harmonickém buzení rezonátoru pístem umístěným v místě $x = L$, můžeme vyjádřit okrajové podmínky následujícím způsobem

$$v = (v_+ - v_-)_{x=0} = 0, \quad v_{\pm}(t=0) = 0, \quad (6)$$

$$v = (v_+ - v_-)_{x=L} = v_{m1} \sin(\omega t) + v_{m2} \sin(2\omega t + \varphi), \quad (7)$$

kde v_{m1} a v_{m2} jsou amplitudy rychlosti pístu a φ reprezentuje fázový posuv. Předpokládejme, že píst kmitá na kmitočtu ω , který je roven $(2n+1)$ -té vlastní frekvenci, tj. $\omega = \omega_{2n+1}$. Tento předpoklad zajišťuje, že vyšší harmonické složky nelineární stojaté vlny budou v koincidenci s vlastními frekvencemi příslušného rezonátoru.

Rovnice (3) spolu s podmínkami (6) a (7) se mohou řešit pomocí metody postupných aproximací, viz [5]. Na základě této metody získáme následující modelové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_{\pm}}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0} \bar{v}_{\pm} \frac{\partial \bar{v}_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_{\pm}}{\partial \tau_{\pm}^2} = \\ = \frac{v_{m1} c_0}{2L} \sin(\omega \tau_{\pm}) + \frac{v_{m2} c_0}{2L} \sin(2\omega \tau_{\pm} + \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Rovnice (8) představují nehomogenní Burgersovu rovnici, kde

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\pm}(t, \tau_{\pm}) = v_{\pm}(t, \tau_{\pm}) \pm \frac{v_{m1} x}{2L} \sin(\omega \tau_{\pm}) \pm \\ \pm \frac{v_{m2} x}{2L} \sin(2\omega \tau_{\pm} + \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Dosažením z rovnic (9) do rovnice (4) dostaneme

$$\begin{aligned} v(t, x) = \bar{v}_+ - \bar{v}_- - \frac{v_{m1} x}{L} \cos\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \sin(\omega t) - \\ - \frac{v_{m2} x}{L} \cos\left(\frac{2\omega x}{c_0}\right) \sin(2\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Asymptotická řešení modelové rovnice

Pro další úvahy a přehlednost je vhodné vyjádřit rovnice (8) v bezrozměrném tvaru

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial s} - V_{\pm} \frac{\partial V_{\pm}}{\partial y_{\pm}} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial y_{\pm}^2} = \sin(y_{\pm}) + p \sin(2y_{\pm} + \varphi), \quad (11)$$

kde

$$\begin{aligned} s = \frac{t}{t_s}, \quad V_{\pm} = \frac{\bar{v}_{\pm}}{v_0}, \quad y_{\pm} = \omega \tau_{\pm}, \quad \Gamma = \frac{2\rho_0 c_0 \beta v_0}{b\omega}, \\ p = \frac{v_{m2}}{v_{m1}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{v_{m1} c_0}{2\pi\beta}}, \quad t_s = \frac{c_0}{\beta\omega v_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Rovnice (11) mají shodný tvar pro obě proti sobě postupující vlny, tudíž pro přehlednost můžeme tyto rovnice přeznačit následujícím způsobem

$$\frac{\partial V}{\partial s} - V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin(y) + p \sin(2y + \varphi). \quad (13)$$

Budeme-li uvažovat o zvukovém poli uvnitř rezonátoru, že je pouze ve stacionárním stavu ($\partial V / \partial s = 0$), pak použitím Coleovy-Hopfovy transformace (viz např. [2], [7])

$$V = \frac{2}{\Gamma} \frac{U'}{U} \quad (14)$$

pro rovnici (13) dospějeme k následující lineární diferenciální rovnici

$$U'' + \left[a - \frac{\Gamma^2}{2} \cos(y) - \frac{\Gamma^2 p}{4} \cos(2y + \varphi) \right] U = 0, \quad (15)$$

kde čárka představuje derivaci vzhledem k proměnné y . Rovnice (15) představuje tzv. *Whittauerovu-Hillovu rovnici* (viz [8], [9]). Když parametr p není příliš vysoký, můžeme pomocí asymptotické metody (viz [11]) řešit rovnici (15). Aplikací asymptotické metody a transformace (14) dospějeme pro $\varphi = \pi$ k následujícímu řešení

$$\begin{aligned} V(y) \simeq 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) \sqrt{1 + 2p \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \cdot \\ \cdot \tanh \left[2\Gamma \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sqrt{1 + 2p \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Když se Γ limitně blíží k nekonečnu (ideální tekutina), dostáváme ze vztahu (16) následující řešení

$$V(y) = 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) \operatorname{sign}(y) \sqrt{1 + 2p \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}. \quad (17)$$

Řešení (17) bylo prezentováno v článku [3]. Když $p = 0$, potom řešení (16) a (17) přecházejí v tvary (viz [4])

$$V(y) \simeq 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) \tanh \left[\Gamma \sin\left(\frac{y}{2}\right) \right] \quad (18)$$

a

$$V(y) = 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) \operatorname{sign}(y). \quad (19)$$

Řešení (16) můžeme vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$V \simeq \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin(ny), \quad (20)$$

kde

$$\begin{aligned} V_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) \sqrt{1 + 2p \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \cdot \\ \cdot \tanh \left[2\Gamma \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sqrt{1 + 2p \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} \right] \sin(ny) dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Pak můžeme psát (viz [11])

$$\begin{aligned} V_n \simeq \frac{2 + \frac{p}{2}}{2\Gamma \sinh \left[\frac{\pi(n+1/2)}{2\Gamma} \right]} + \frac{2 + \frac{p}{2}}{2\Gamma \sinh \left[\frac{\pi(n-1/2)}{2\Gamma} \right]} - \\ - \frac{p}{4\Gamma \sinh \left[\frac{\pi(n+3/2)}{2\Gamma} \right]} - \frac{p}{4\Gamma \sinh \left[\frac{\pi(n-3/2)}{2\Gamma} \right]}. \end{aligned} \quad (22)$$

Když $\Gamma \rightarrow \infty$ (ideální tekutina), dostaneme ze vztahu (22) tento výraz

$$V_n \simeq -\frac{16n(9+2p-4n^2)}{\pi(16n^4-40n^2+9)}. \quad (23)$$

Pro $p = 0$ přejde řešení (23) do následujícího tvaru

$$V_n = \frac{16n}{\pi(4n^2-1)}. \quad (24)$$

Pomocí výrazů (10) a (20) můžeme psát

$$v(x, t) \simeq -2\sqrt{\frac{v_{m1}c_0}{2\pi\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[V_n \sin\left(\frac{n\omega x}{c_0}\right) \cos(n\omega t) \right] - \frac{v_{m1}x}{L} \cos\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \sin(\omega t) + \frac{v_{m2}x}{L} \cos\left(\frac{2\omega x}{c_0}\right) \sin(2\omega t). \quad (25)$$

4. Porovnání s numerickými výsledky

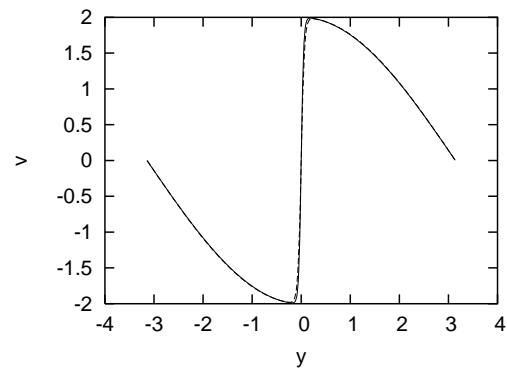
V této části porovnáme asymptotická (analytická) a numerická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice pro různé hodnoty parametrů Γ a p .

Nehomogenní Burgersovu rovnici řešíme standardní numerickou metodou Runge-Kutty čtvrtého řádu v kmitočtové oblasti (uvažujeme o prvních 100 harmonických složkách). Numerické oscilace byly tlumeny pomocí umělé útlumové funkce

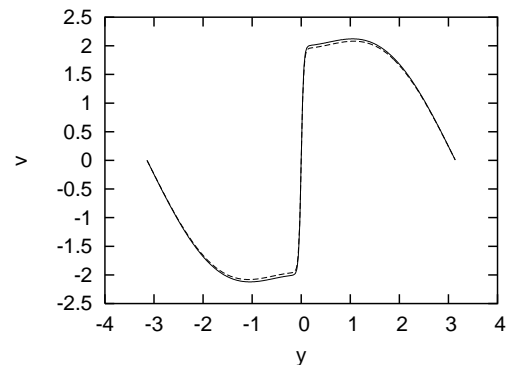
$$\Xi_n = \frac{\sin(nH)}{nH}, \quad (26)$$

kde H je tlumící součinitel. Každá harmonická je násobena koeficientem Ξ_n . Součinitel H byl zvolen tak, že numerické oscilace téměř vymizely. Žádného umělého útlumu nebylo použito při volbě parametru $\Gamma = 20$.

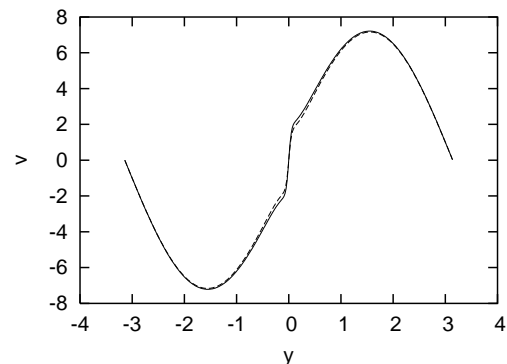
Srovnání asymptotického řešení (16) s numerickým je prezentováno na obrázcích 1 až 6. První sada obrázků je realizována pro $\Gamma = 20$ a pro p rovné 0, 1 a 25, kdežto druhá sada obrázků je realizována pro $\Gamma = 50$ a stejné hodnoty parametru p . V obou dvou sadách obrázků můžeme pozorovat dobrou shodu mezi numerickými a asymptotickými řešeními, pro $\Gamma = 20$ vychází toto srovnání o něco málo hůře než pro $\Gamma = 50$, což je v souladu s podmínkami, za kterých bylo asymptotické řešení odvozeno. Abychom demonstrovali přínos nového asymptotického řešení (16), srovnali jsme průběh jednotlivých harmonických pro různé hodnoty Γ na obrázku 7. K tomuto účelu jsme použili vztahu (22) pro $p = 0$. Z tohoto obrázku je patrné, že zvláště u vyšších harmonických dochází k výrazným rozdílům pro menší hodnoty parametru Γ . Abychom ilustrovali platnost spektrálního řešení (22), zhotovili jsme obrázek 8.



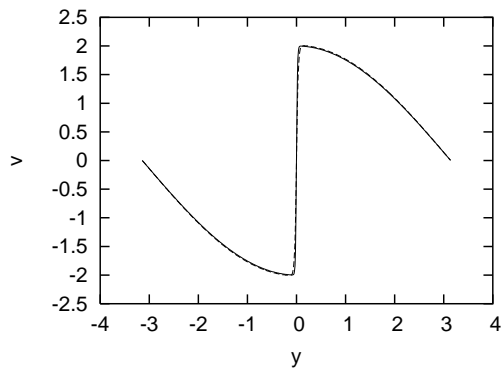
Obrázek 1: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 20$, $p = 0$



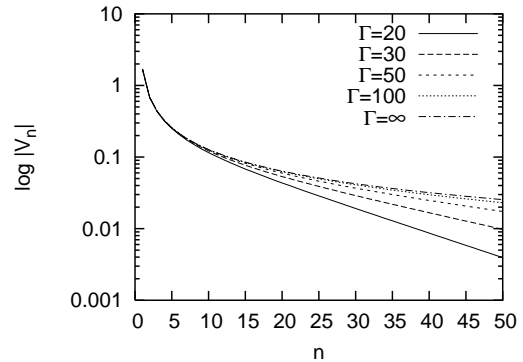
Obrázek 2: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 20$, $p = 1$



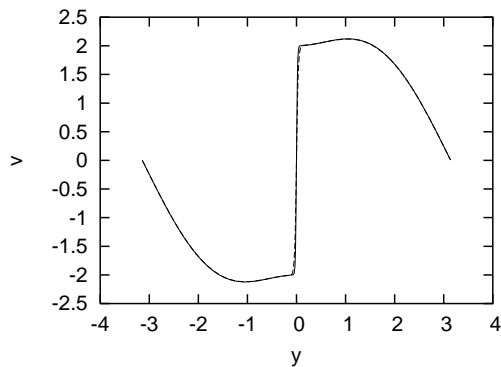
Obrázek 3: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 20$, $p = 25$



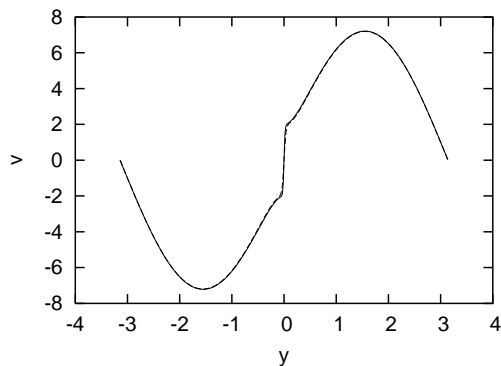
Obrázek 4: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 50$, $p = 0$



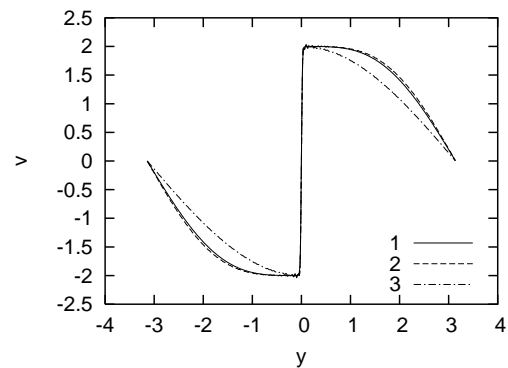
Obrázek 7: Srovnání velikostí harmonických $|V_n|$ pro různé hodnoty Γ a $p = 0$



Obrázek 5: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 50$, $p = 1$



Obrázek 6: Srovnání asymptotického řešení (plná čára) a numerického řešení (přerušovaná čára), $\Gamma = 50$, $p = 25$



Obrázek 8: Srovnání asymptotického řešení pro $p = 0,5$ (plná čára), spektrálního řešení pro $p = 0,5$ (přerušovaná čára) a spektrálního řešení pro $p = 0$ (čerchovaná čára), $\Gamma = 50$

5. Závěr

Článek je věnován nalezení asymptotického řešení nehomogenní Burgersovy rovnice, která slouží k popisu nelineárních stojatých vln v rezonátoru kruhového průřezu, jenž je buzen pístem kmitajícím současně na dvou frekvencích, mezi nimiž je fázovým posuv π . Tento způsob buzení umožňuje potlačit nelineární útlum.

Nalezené asymptotické řešení bylo porovnáno s řešením numerickým. Z porovnání vyplývá, že nalezené asymptotické řešení se liší pro $G \gtrsim 20$ od numerického jen nepatrně. Rovněž byl nalezen spektrální tvar asymptotického řešení pro $p \lesssim 0,5$, který umožní sledovat vliv zvoleného způsobu buzení na generování jednotlivých harmonických složek.

Poděkování

Tento příspěvek byl podporován GAČR č. 202/01/1372 a výzkumným záměrem J04/98:212300016.

Reference

- [1] G. W. Swift: "Thermoacoustics engines," *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1145–1180, 1988.
- [2] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky: *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*, USA, Cambridge University Press, 1998.
- [3] V. E. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, S. Job, M. Bruneau: „Enhancement of the Q of a nonlinear acoustic resonator by active suppression of harmonics," *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 3717–3720, 1998.
- [4] W. Chester: "Resonant oscillations in closed tubes," *J. Fluid Mech.* **18**, 44–64, 1964.
- [5] V. E. Gusev: "Buildup of forced oscillations in acoustic resonator," *Sov. Phys. Acoust.* **30**, 121–125, 1984.
- [6] V. P. Kuznetsov: "Equations of Nonlinear Acoustics," *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467–470, 1971.
- [7] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock: *Nonlinear Acoustic*, USA, Academic Press, 1998.
- [8] K. M. Urwin, F. M. Arscott: "Theory of the Whittaker-Hill equation," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **69**, 28–44, 1970.
- [9] K. M. Urwin: "Characteristic values of the Whittaker-Hill equation with one large parameter," *Buletinul Institutului Politehnic Iasi* **26**, 33–40, 1975.
- [10] V. E. Gusev: "Parametric amplification of acoustic waves in closed tubes," *Sov. Phys. Acoust.* **30**, 176–180, 1984.
- [11] M. Bednařík, P. Koníček: "Asymptotic solutions of the inhomogeneous Burgers equation," *J. Acoust. Soc. Am.* **114**, 2003 (v tisku č. 6).

Selektivní potlačení harmonických v akustickém rezonátoru

Petr Koníček a Michal Bednařík

ČVUT – FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: [konicek,bednarik]@fel.cvut.cz

The method of the second harmonic suppression in resonators by means of passive and active methods is investigated in this paper. The resonator is driven by a piston which vibrates with two frequencies. The first one agrees with an eigenfrequency and the the second one is equal to the two times higher eigenfrequency. The phase shift of the second piston motion is 180 degrees. It is known that for this case it is possible to describe generation of the higher harmonics by means of the inhomogeneous Burgers equation.

1. Úvod

Využití nelineárních stojatých vln je omezeno vlivem nelineárního útlumu, který způsobuje akustické saturační jevy. Důležitou charakteristikou rezonátoru je jeho jakost Q , která určuje, kolikrát je amplituda stojatých vln větší než amplituda kmitů budícího pístu. Jakost rezonátoru Q závisí na amplitudě kmitů budícího pístu prostřednictvím nelineárního útlumu. Nelineární útlum je spojen s nelineární akustickou vlnovou interakcí, která způsobuje generaci vyšších harmonických. Zatímco termoviskózní útlum je úměrný druhé mocnině frekvence, je možné vliv nelineárního útlumu zmenšit potlačením vlnových kaskádních procesů. Rezonátory s vysokou jakostí se využívají v termoakustických strojích, akustických čerpadlech a chemických dezintegračních zařízeních.

Pro využití nelineárních stojatých vln jsou nutné rezonátory s vysokou jakostí, které umožňují akumulovat velké množství akustické energie. Tato práce se zabývá problematikou nelineárního útlumu s využitím selektivních absorberů v akustických rezonátorech. Tato pasivní metoda umožňuje zvýšit jakost rezonátoru Q . Práce se rovněž zabývá aktivní metodou potlačení druhé harmonické komponenty zvukové vlny v rezonátoru, kterou je rovněž možné využít ke zvýšení jakosti rezonátoru Q .

V souladu s nelineární teorií druhého řádu je možné popsat akustické pole v rezonátoru pomocí proti sobě se šířících vln, o kterých budeme předpokládat, že uvnitř rezonátoru spolu neinteragují. Tyto vlny jsou svázány pouze okrajovými podmínkami. Za předpokladu, že vlny se v čase a v prostoru mění pomalu, je můžeme popsat pomocí nehomogenní Burgersovy rovnice. Vznik vyšších harmonických v rezonátoru můžeme ovlivnit v případě, že budící píst vyzařuje více než jednu vlastní frekvenci.

2. Modelové rovnice pro popis aktivního potlačení a pasivní absorpce harmonických

Při popisu stojatých vln konečné amplitudy ve válcovém rezonátoru o neproměnném poloměru je možné použít nehomogenní Burgersovu rovnici v bezrozměrném tvaru

$$\frac{\partial \bar{V}_{\pm}}{\partial \sigma} - \bar{V}_{\pm} \frac{\partial \bar{V}_{\pm}}{\partial \tau'_{\pm}} - \frac{1}{G_0} \frac{\partial^2 \bar{V}_{\pm}}{\partial \tau'^2_{\pm}} + D \frac{\partial^{\frac{1}{2}} \bar{V}_{\pm}}{\partial \tau'^{\frac{1}{2}}_{\pm}} = K \sum_{n=1}^N (K_n + L_n V_n) \sin(n\tau'_{\pm} + \varphi_{\pm}^{(n)}), \quad (1)$$

kde bezrozměrné souřadnice jsou definovány jako

$$\sigma = \frac{\beta v_0 \omega t}{c_0}, \quad \tau'_{\pm} = \omega \tau_{\pm}, \quad \bar{V}_{\pm} = \frac{\bar{v}_{\pm}}{v_0}, \quad (2)$$

kde t je čas, c_0 je rychlost zvuku pro malé signály, β je parametr nelinearity, ω je úhlová rychlost, v_0 je amplituda rychlosti, τ_+ a τ_- jsou retardované časy

$$\tau_+ = t - \frac{x}{c_0}, \quad \tau_- = t + \frac{x}{c_0}, \quad (3)$$

kde x je prostorová souřadnice ve směru osy rezonátoru.

$$\bar{v}_{\pm}(t, \tau_{\pm}) = v_{\pm}(t, \tau_{\pm}) \pm \sum_{n=1}^N \frac{v_n x}{2L} \sin(n\omega \tau_{\pm} + \varphi_{\pm}^{(n)}), \quad (4)$$

kde L je délka rezonátoru. V_n je amplituda n -té harmonické rychlosti \bar{V}_{\pm}

$$V_n = \frac{2}{T} \int_0^T \bar{V}_{\pm} \sin(n\tau'_{\pm}) d\tau'_{\pm}. \quad (5)$$

G_0 je Goldbergovo číslo, D je koeficient mezní vrstvy,

$$D = \frac{B c_0^2}{R_0 \sqrt{\omega} v_n \beta}, \quad (6)$$

$$B = \sqrt{\frac{\nu}{2c_0^2}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right), \quad (7)$$

R_0 je poloměr rezonátoru, ν je koeficient kinematické viskozity, γ je adiabatický exponent, Pr je Prandtlovo číslo. Zlomkovou derivaci v (1) můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}} f(\tau)}{\partial \tau^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}. \quad (8)$$

K_n jsou amplitudy aktivního potlačení harmonických, L_n jsou amplitudy selektivní absorpce harmonických.

Pro akustickou rychlost můžeme psát

$$v = v_+ - v_- . \quad (9)$$

Rovnice (1) platí pro úhlové frekvence $\omega = \omega_n$ dané vztahem

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \quad (10)$$

V případě, že předpokládáme harmonické buzení stojatých vln v rezonátoru pomocí pístu v místě $x = L$, můžeme vyjádřit okrajové a počáteční podmínky jako

$$v = (v_+ - v_-)_{x=0} = 0, \quad v_{\pm}(t = 0) = 0, \quad (11)$$

$$v = (v_+ - v_-)_{x=L} = \sum_{n=1}^N v_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (12)$$

kde v_n jsou amplitudy akustické rychlosti pístu a φ_n jsou fázové posuny. Předpokládáme, že píst kmitá s úhlovou frekvencí ω , která je rovna $(2n + 1)$ -té vlastní frekvenci popisovaného rezonátoru dané vztahem $\omega = \omega_{2n+1}$. Tento předpoklad způsobuje, že vyšší harmonické složky akustické rychlosti odpovídají vlastním frekvencím.

3. Výsledky

V tomto odstavci se budeme zabývat srovnáním mezi řešením rovnice (1), jestliže bereme v úvahu aktivní potlačení druhé harmonické a selektivní absorpci druhé harmonické.

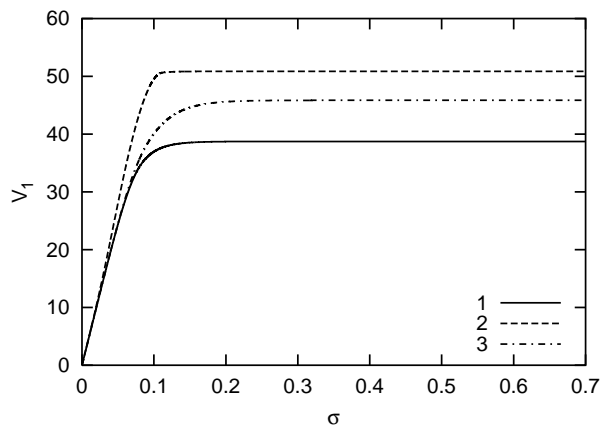
Nehomogenní Burgersovu rovnici (1) jsme řešili ve frekvenční oblasti standardní metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu (s prvními 100 harmonickými). Numerické oscilace byly odstraněny pomocí umělého útlumu. Každá harmonická byla násobena koeficientem Ψ_n

$$\Psi_n = \frac{\sin(nH)}{nH}, \quad (13)$$

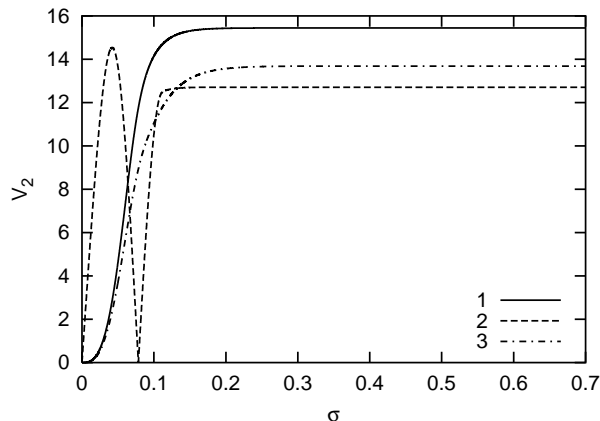
kde H je frekvenční tlumicí koeficient, což způsobuje přídavný útlum jednotlivých harmonických. Hodnota H byla zvolena tak, že numerické oscilace nevznikaly a tento přídavný útlum byl pozorovatelný jen na nejvyšších harmonických. Výsledky jsou získány pro $G_0=1000$, $D = 0,01$, $K = 500$.

Pro parametry $N=1$, $K_1=1$, $L_1=0$, $\varphi_{\pm}^{(1)}=0$ nebyl umělý útlum použit. Pro výpočet aktivního potlačení druhé harmonické byly použity parametry $N=2$, $K_1=1$, $K_2 > 0$, $L_1 = L_2 = 0$, $\varphi_{\pm}^{(1)} = 0$, $\varphi_{\pm}^{(2)} = \pi$. Při modelování selektivní absorpce na druhé harmonické jsme použili $N=2$, $K_1=1$, $K_2 = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 > 0$, $\varphi_{\pm}^{(1)} = 0$, $\varphi_{\pm}^{(2)} = \pi$.

První sada obrázků 1-5 je pro $K_2 = 1$, $V_2=20$, druhé sadě 6-10 odpovídá $K_2 = 25$, $V_2=500$.



Obrázek 1: Časový vývoj první harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)

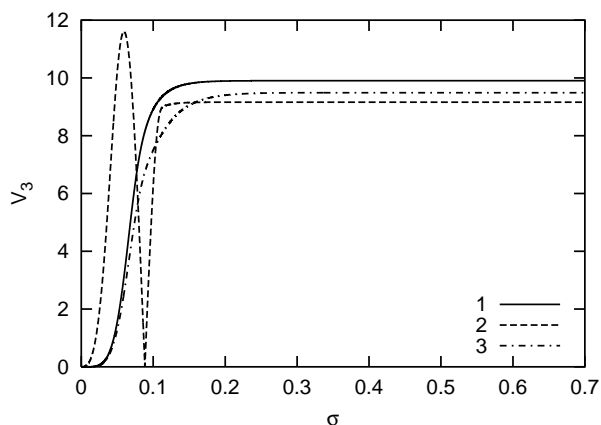


Obrázek 2: Časový vývoj druhé harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)

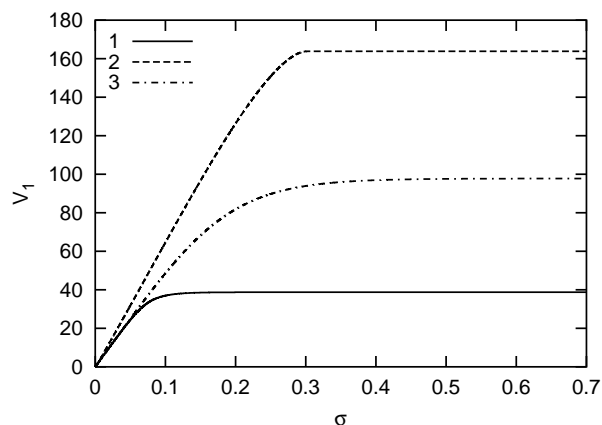
4. Závěr

Z obrázků (1) až (10) vidíme, že transport energie směrem k vyšším harmonickým je omezen a vzniká "subharmonická" na první vlastní frekvenci rezonátoru. Z tohoto důvodu dochází rovněž k potlačení akustického saturačního efektu. Potlačení akustické saturace způsobuje, že roste jak amplituda stojaté vlny, tak jakost rezonátoru Q . Vyšší jakost Q znamená, že v rezonátoru dochází k akumulaci většího množství akustické energie.

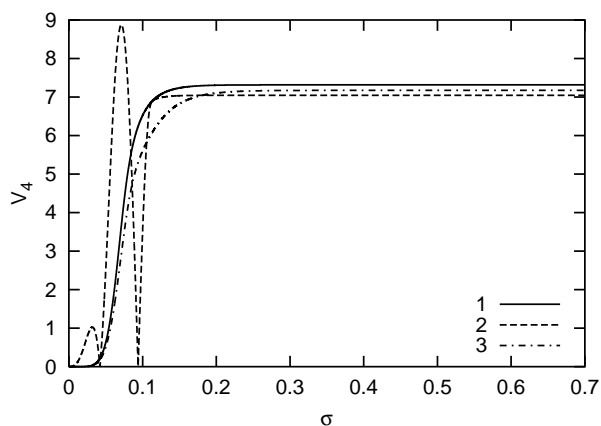
Jev aktivního potlačení druhé harmonické je v principu podobný selektivní absorpci na druhé harmonické. Z numerických výsledků je však zřejmé, že děje související s aktivním potlačením druhé harmonické jsou mnohem silnější.



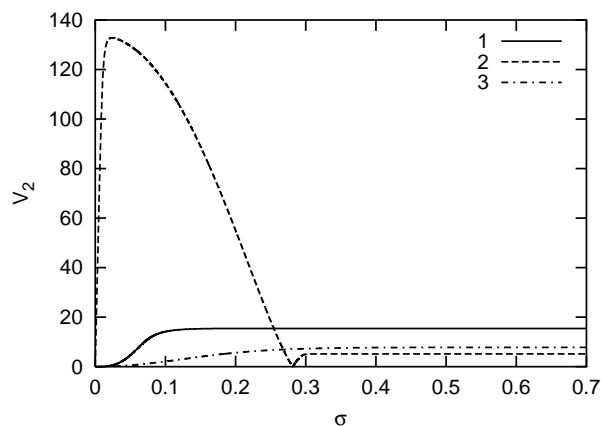
Obrázek 3: Časový vývoj třetí harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



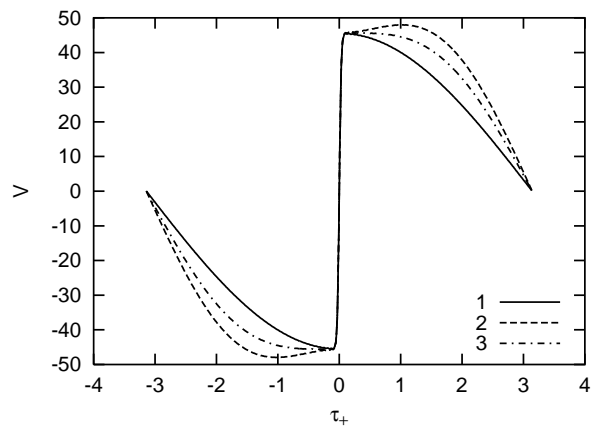
Obrázek 6: Časový vývoj první harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



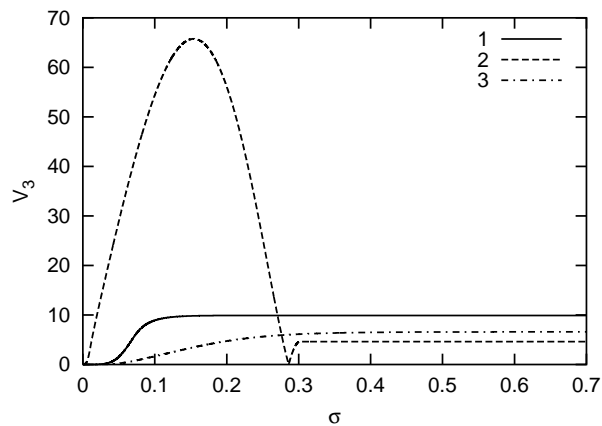
Obrázek 4: Časový vývoj čtvrté harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



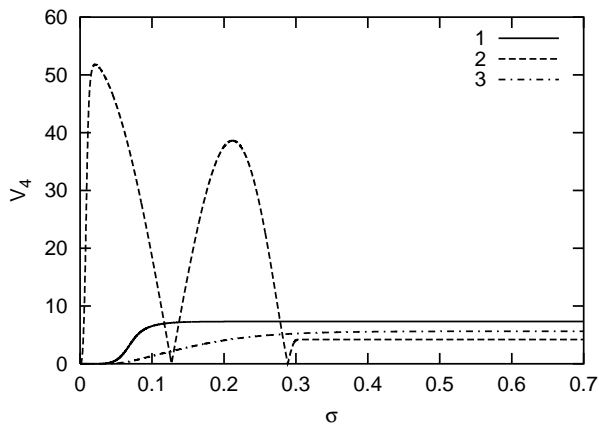
Obrázek 7: Časový vývoj druhé harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



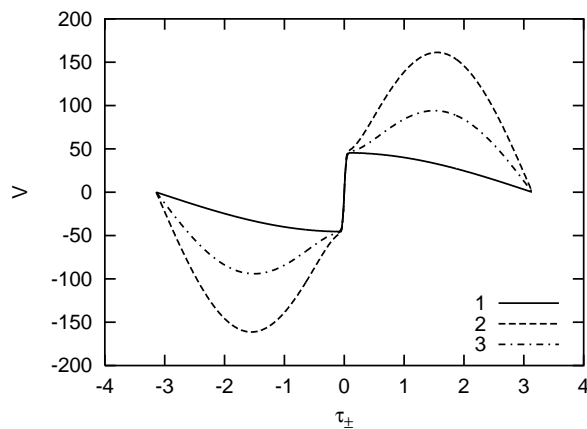
Obrázek 5: Časový vývoj akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



Obrázek 8: Časový vývoj třetí harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



Obrázek 9: Časový vývoj čtvrté harmonické akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)



Obrázek 10: Časový vývoj akustické rychlosti. Srovnání řešení bez tlumení (křivka nepřerušovaná), s aktivním tlumením (křivka čárkovaná) a se selektivní absorpcí (křivka čerchovaná)

Poděkování

Tato práce byla podporována grantem GAČR 202/01/1372 a výzkumným záměrem ČVUT J04/98:2123000016.

Reference

- [1] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky "Nonlinear Wave Processes in Acoustics", USA, Cambridge University Press, 1998.
- [2] V. E. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, S. Job, M. Bruneau "Enhancement of the Q of a nonlinear acoustic resonator by active suppression of harmonics", *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 3717–3720, 1998.
- [3] W. Chester "Resonant oscillations in closed tubes", *J. Fluid Mech.* **18**, 44–64, 1964.
- [4] V. Kaner, O. V. Rudenko, R. Khokhlov, Theory of nonlinear oscillations in acoustic resonators. *Sov. Phys. Acoust.* **23**, 432–437, 1977.
- [5] V. E. Gusev "Buildup of forced oscillations in acoustic resonator", *Sov. Phys. Acoust.* **30**, 121–125, 1984.
- [6] V. P. Kuznetsov "Equations of Nonlinear Acoustics", *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467–470, 1971.
- [7] M. F. Hamilton, D. T. Blackstock *Nonlinear Acoustic*, USA, Academic Press, 1998.
- [8] S. I. Aanonsen, Numerical computation of the near-field amplitude sound beam., Report no. 73, University of Bergen, Department of Mathematics, 1983.
- [9] Ya. M. Zhileikin, T. M. Zhuravleva, O. V. Rudenko, Nonlinear effects in the propagation of high-frequency sound waves in tubes *Sov. Phys. Acoust.* **26**, 32–34, 1980.
- [10] O. V. Rudenko, Nonlinear sawtooth-shaped waves *Physics-Uspeski* **38**, 965–990, 1995.

Možnosti zdokonalení ultrazvukového termálního průtokoměru využitím metod Time Reversal Acoustic

Jaroslav Plocek

ČVUT – FEL, Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: plocek@fel.cvut.cz

This paper shortly reviews several recently used methods of thermal marks detection in liquid marking flowmeters and describes their problems. It introduces principles of the Time Reversal Acoustic and its basic characteristics in view to their use in flowmeters and suggests a new method for mark detection, based on the one-channel Time Reversal procedure.

1. Úvod

V současné době jsou známy různé druhy neinvazivních kapalinových průtokoměrů. Jedním z nich jsou ultrazvukové průtokoměry se sondami, přikládány z vnějšku v různých místech na potrubí, které využívají převážně metod Transit time nebo korelačních metod a jsou schopny měřit rychlost proudění čistých kapalin v potrubí o nejmenším průměru přibližně 12,5 mm a určovat nejmenší hodnoty průtokové rychlosti o velikosti zhruba 30 mm/s. Pro menší průměry trubíc a menší průtokové rychlosti není známa neinvazivní metoda na měření průtoku kapalin, v nichž nejsou přítomny částice rozptylující ultrazvuk.

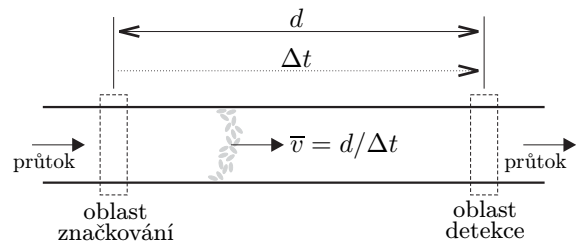
Jsou rovněž známy značkovací průtokoměry, které jsou však využívány v malém měřítku, protože neměří okamžitou průtokovou rychlost, ale jen průměrnou průtokovou rychlost na měřicím úseku, a kromě toho je značka nestabilní a časem se rozplývá, a to zejména při turbulentním proudění prakticky okamžitě. Přesto však mají právě v oblasti malých průtokových rychlostí a malých průměrů trubíc nezanedbatelný vývojový potenciál.

Na našem pracovišti se zabýváme výzkumem průtokoměru s termální značkou generovanou v kapalině výkonovým ultrazvukem z vnější strany trubice [1]. Při hledání optimální metody pro detekci termální značky se nabízejí možnosti v posledních letech slibně se rozvíjejícího oboru – Time Reversal Acoustic.

2. Kapalinový průtokoměr s termální značkou generovanou i detekovanou ultrazvukem

Je založen na měření unášivé rychlosti ohraničené oblasti kapaliny, v níž byla uměle (malým lokálním ohřevem) vytvořena malá, ale měřitelná, změna teploty – značka, což vede u převážné většiny kapalin mj. ke změně rychlosti šíření ultrazvuku. Toho se pak využívá k detekci průchodu značky předem definovaným místem (obr. 1).

Průtoková rychlost je vyhodnocována z doby průchodu značky měřeným úsekem známé délky. Objemový průtok



Obrázek 1: Princip značkovacího průtokoměru

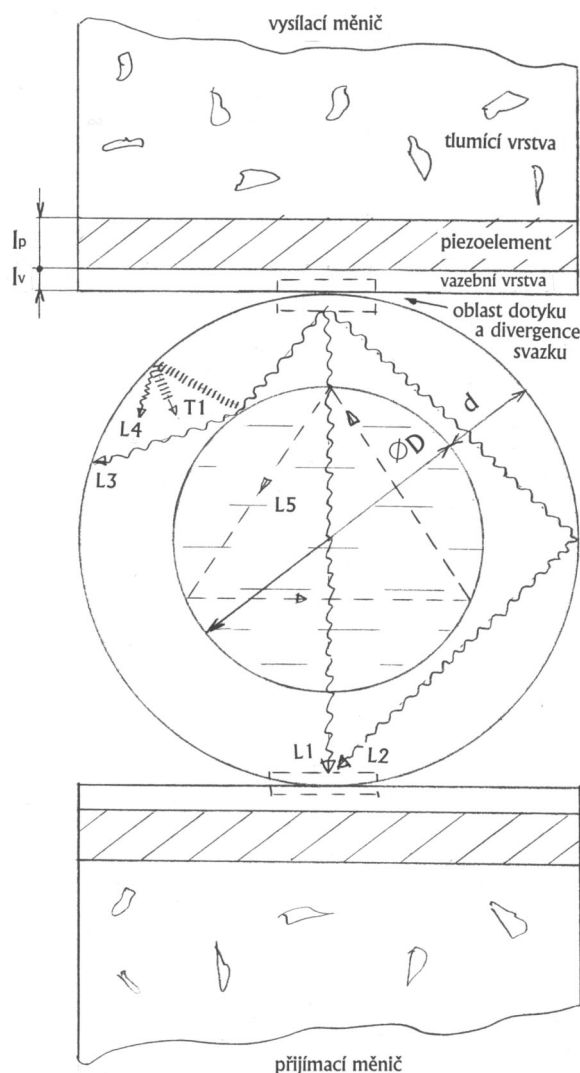
se určí snadno při dodržení konstantního průřezu trubice v měřeném úseku. Předpokladem je laminární proudění.

2.1. Metody ultrazvukové detekce termálních značek

Klasické metody UZ detekce těchto značek mohou být obecně kontinuální nebo impulzní, průchodové nebo odrazové, přičemž je požadována extrémní citlivost, dobrá odolnost proti vnějšímu rušení a možnost použití příložených sond. Požadavek na extrémní citlivost detekce je dán použitou metodou vytváření značky, která je z hlediska účinnosti ohřevu málo efektivní. Poměrná změna rychlosti šíření $\Delta c/c$ dosahovaná tímto způsobem leží mezi 10^{-3} a 10^{-4} .

Faktory vymezující optimální detekční metodu lze diskutovat na obrázku 2, kde je ve schematickém řezu vyznačeno uspořádání příložených snímačů na válcové trubici malého průměru a kde jsou zakresleny některé cesty UZ signálu.

Především je třeba vzít v úvahu, že při malých průměrech trubice (a tudíž potřebě vyšší frekvence UZ signálu) leží rozměry l_p , l_v , d a D v rozsahu jednoho řádu. Velké zakřivení povrchu trubice zužuje podstatně oblast dotyku s měničem, v důsledku toho pak dochází k divergenci UZ svazku uvnitř trubice. Tím se otevírá možnost průchodu UZ svazku pláštěm trubice, a to jak podélné vlny (L2), tak příčné vlny vznikající konverzí módu při odrazu (T1). Reálná je i možnost vybuzení povrchové vlny (S1), za povšimnutí stojí i možnost vzniku trojúhelníkové signálové cesty (L5, viz dále). Přitom informaci o rychlosti šíření v kapa-



Obrázek 2: Schematické uspořádání příložných měničů na válcové trubici v řezu a některé cesty UZ signálu

lině nese jen podélná vlna procházející přímo (L1), resp. dvěma odrazy uvnitř (L5).

Při použití *impulzní metody* tak může snadno nastat situace, kdy doba průchodu $t_{L1} \geq t_{L2(3,4)}$. Okamžik příchodu přijatého impulsu je tak dán vlastnostmi trubice a informace o změnách rychlosti šíření v kapalině, která dorazí k přijímači s malým zpožděním, je superponována na zbylou část předchozího impulsu a obsažena ve spektru této superpozice, což podstatně ztěžuje možnost jejího rychlého vyhodnocení. Zkracováním vysílaného impulsu lze sice četnost výskytu těchto situací poněkud omezit, ale nikdy ne zcela odstranit (ostatně potřeba krátkých impulsů je dána již malou dobou průchodu UZ trubicemi uvažovaných průměrů – řádově jednotky ms). Navíc přijetím impulsu na přijímací straně jeho existence nekončí – v oblasti budou ještě dlouho přetrvávat mnohonásobné odrazy různých modů vlnění!

Řešení problému lze podmíněně najít v modifikované interferometrické metodě. Vysílací měnič je napájen kontinuálním sinusovým signálem, jehož frekvence je zvolena tak, aby došlo ke vzniku úplného stojatého vlnění (rezonance) na přímé dráze v kapalině mezi měniči (vzhledem k nevelkým ztrátám UZ energie v kapalinách lze dosáhnout rezonance s velkým Q i za výše uvedených rozptylových a odrazových podmínek). Rezonanční stav však nelze dobře zjišťovat na změnách impedance vysílacího měniče (malá plocha dotyku měniče s trubicí atd.); je proto nutné použít ještě měnič přijímací (obr. 2). Měřením dynamických fázových a amplitudových odchylek mezi vysílaným a přijímaným signálem v rezonanci je pak možno identifikovat procházející termální značku.

Problémy s parazitními cestami signálu však tato metoda neřeší, jenom je přesouvá z oblasti časové do oblasti kmitočtové. Každému způsobu šíření UZ vlny mezi měniči odpovídá samozřejmě příslušná rezonance. Je tedy třeba řešit otázku vhodného naladění vysílací frekvence tak, aby dosažená rezonance reprezentovala vlnu procházející kapalinou a nesla informaci o rychlosti šíření v ní.

Tento problém lze částečně řešit zavedením jistého stupně inteligence do měřicího systému. Na začátku měření systém provádí test, při kterém „prohlédne“ rezonanční spektrum při vypnutém značkování. Po zavedení značek se snaží najít ve svém pracovním kmitočtovém pásmu rezonanci, jejich fáze i amplituda byly značkováním ovlivněny. Ke zdokonalení této procedury lze též využít periodicity značkování.

Vážným problémem, komplikujícím tuto proceduru, jsou blízké rezonance, z nichž jedna je realizována v kapalině a druhá v plášti trubice. Menší problém představují změny teploty kapaliny i trubice během měření, které lze do značné míry eliminovat opakováním testu.

V souhrnu lze konstatovat, že žádná z uvedených detekčních metod dosud neposkytuje v uvažovaných podmínkách spolehlivé výsledky a je tedy důvod ke hledání způsobů jejich zdokonalení, jakož i metod zcela nových.

3. Time-Reversal Acoustic

3.1. Základy

Jak známo, řešením vlnové rovnice popisující šíření elastické vlny v prostoru

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

může být stejně dobře funkce $p(\mathbf{r}, t)$, jako funkce $p(\mathbf{r}, -t)$, tedy vlnová rovnice je invariantní vůči obrácení chodu času. Nutnými předpoklady invariance jsou kmitočtová nezávislost útlumu v prostředí a zachování energie vlnění.

Uvažujme nyní o bodovém všesměrovém zdroji vlnění vyzařujícím časově omezený signál s dobou trvání T , jehož zvukové pole zaznamenáme v čase pomocí nekonečného počtu bodových snímačů rozložených na ploše uzavřené okolo tohoto zdroje. V následujícím kroku využi-

jeme těchto snímačů k opětovnému a synchronnímu vyslání zaznamenaných signálů zpět do prostoru, tentokrát však „pozpátku“, tedy s obrácením chodu času. Takto vytvořené vlnění pak nutně konverguje do místa, odkud bylo původně bodovým zdrojem vysláno („refocusing“), a lze je popsat funkcí $p(\mathbf{r}, T - t)$. Popsané uspořádání se nazývá Time-Reversal Cavity (TRC).

Je-li signálem vysílaným prvotně z bodového zdroje vlna sinusová (a tedy monochromatická), je zpětně vyslaná (časově reverzovaná) vlna k ní fázově sdružená (konjugovaná). Fázový rozdíl mezi libovolnými dvěma body časově reverzované vlny má stejnou hodnotu a opačné znaménko, jako fázový rozdíl mezi týmiž body ve vlně původní. Časová reverzace monochromatických vln se proto někdy nazývá prostě fázovou konjugací (phase conjugation), zatímco pro časovou reverzaci širokopásmových impulzů se používá vlastního termínu Time-Reversal.

Principy Acoustic Time Reversal byly poprvé publikovány Finkem v roce 1992 [2].

3.2. Cesta k praktickému zjednodušení: Time-Reversal Mirror

Je zřejmé, že původně uvažovaný nekonečný počet bodových snímačů využitý pro úplné zachycení celého zvukového pole musí být v reálném uspořádání nahrazen konečným počtem snímačů, z nichž každý má konečnou nenulovou plochu. Protože k přesné rekonstrukci časově reverzované vlny v celém objemu je nutné zachování nejen časové invariance, ale i prostorové reciprocity, bylo by zapotřebí použít dvoudimenzionální uspořádání snímačů. Avšak i původní požadavek na rozmístění snímačů na uzavřené ploše je obtížně realizovatelný. TR operace jsou proto obvykle realizovány v omezené oblasti, tedy s omezeným počtem snímačů a z toho vyplývající omezenou kvalitou.

K tomu lze využít dnes v ultrazvukové diagnostice často používané plošné (2D) nebo lineární (1D) pole snímačů. Aby bylo zajištěno zaznamenání veškeré informace z vlnění, dopadajícího na pole snímačů, musí být vzájemná vzdálenost snímačů v poli řádu $\lambda/2$, kde λ je nejmenší vlnová délka obsažená ve zpracovávaném vlnění. Každý snímač je propojen s vlastními elektronickými obvody, obsahujícími přijímací zesilovač, A/D převodník, paměť a programovatelný vysílač, schopný syntetizovat časově reverzovaný signál. Taková zařízení, zjednodušující původní a úplnou TRC, se obvykle nazývají Time-Reversal Mirror (TRM). Nejčastěji používané TRM využívají (i vzhledem k nižším nárokům na potřebný HW a SW) převážně lineárních (1D) polí snímačů.

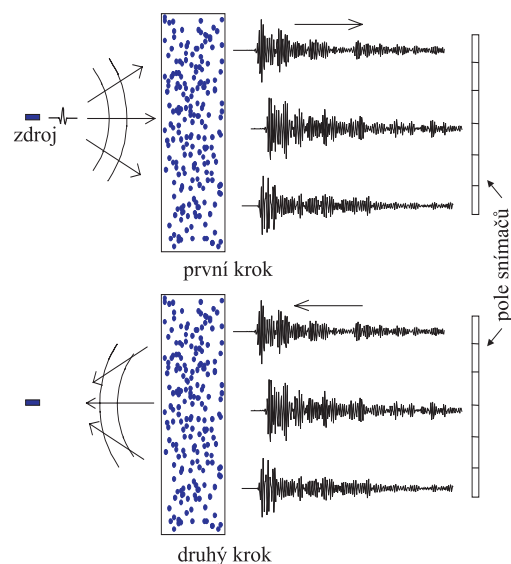
3.3. TR v nehomogenním prostředí

Při dostatečně malých energetických ztrátách vlnění zaručuje vlnová rovnice pro každý zvukový impuls divergující ze zdroje množinu vln, sledujících přesně cestu vlnění prostředím zpět ke zdroji. To zůstává v platnosti i v případech, kdy prostředí obsahuje objekty nebo oblasti s pro-

měnnou hustotou, které zvukový svazek odrážejí, rozptylují nebo ohýbají. Časově reverzované vlnění sleduje všechny složité cesty šíření v takovém prostředí a sbíhá se synchronně v místě původního zdroje.

Zatímco v homogenním prostředí je rozlišovací schopnost časově reverzovaného svazku limitována difrakcí, v prostředí s náhodně rozloženými nehomogenitami může za určitých okolností překročit difrakční limit („super-resolution“).

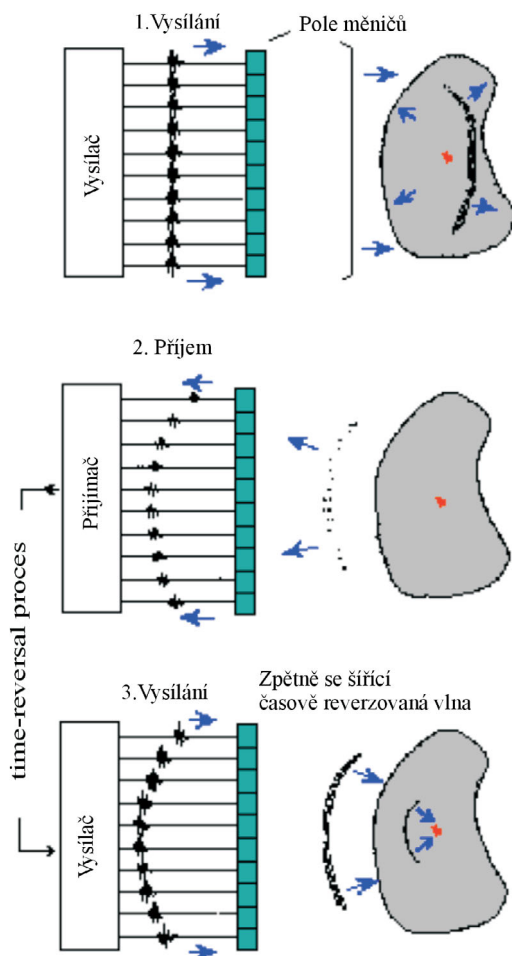
Experimentální ověření těchto závěrů je obsaženo např. ve [3] (obr. 3). Širokopásmový impuls o délce cca $1 \mu\text{s}$ byl v prvním kroku vyslán nesměrově ve vodě přes překážku tvořenou dvěma tisíci rovnoběžných a nepravidelně rozložených tyčinek na lineární řadu složenou z 96 snímačích měničů a zaznamenáván po dobu $200 \mu\text{s}$. Ve druhém kroku byl vyslán časově reverzovaný záznam téhož signálu z lineární řady zpět přes překážku směrem k původnímu zdroji. Kromě očekávané rekonstrukce časového průběhu impulsu v bodě původního zdroje bylo zjištěno šestinásobně lepší prostorové zaostření svazku do tohoto bodu ve srovnání se situací bez umělé překážky tvořené tyčinkami. Důvodem zlepšení je skutečnost, že mnohonásobnými odrazy na překážkách se ke snímači řadě dostane více informace z původní vyslané vlny než bez nich.



Obrázek 3: Experimentální ověření „super-resolution“

Aplikace – detekce nehomogenit Představme si nyní na místě vysílacího bodového měniče ve shora popsaném experimentu výraznější nehomogenitu (např. poruchu materiálu) v jinak slabě nehomogenním prostředí (předp. převažující náhodné rozložení nehomogenit). Ozáříme ji rovinnou vlnou tak, aby se stala sama zdrojem (odraženého či rozptýleného) vlnění. Po aplikaci TRM bude jím vyslané vlnění výrazněji soustředěno právě na tuto nehomogenitu, takže následný odraz či rozptyl od ní bude výraznější a umožní její lepší detekci. K primárnímu ozáření prostředí

pak můžeme použít přímo pole snímačů, využitě následně při příjmu a realizaci TRM (obr. 4).



Obrázek 4: Detekce nehomogenit s využitím TRM

3.4. Iterativní TR

Opakováním procedury popsané v posledních dvou experimentech za přítomnosti většího počtu výraznějších objektů v prostředí dochází postupně k zaostření svazku na nejvýraznější z nich [4]. Další pěkná a zajímavá vlastnost TR!

Možnosti využití iterativní TR při vyhodnocování průtoku V aplikacích TR je samozřejmým požadavkem zachování TR invariance v prostředí. Případné rozdíly v rychlosti šíření zvuku a s nimi související teplotní změny v prostředí jsou tedy kompenzovány, jen pokud nejsou pohyblivé („skalární nehomogenity“). V proudící kapalině obsahující podobné nehomogenity, jakou je např. termální značka v našem průtokoměru („vektorové nehomogenity“), bude TR invariance porušena. Pokud by však byl rozsah tohoto porušení dostatečně malý, bylo by jej možno vyhodnotit využitím iterativní TR a realizovat tak detek-

tor průchodu značky! Pomalý pohyb značky bude pak při této proceduře jednoznačnou výhodou.

Dosud byly popsány metody využívající podobným způsobem iterativní TR při charakterizaci vírů v tekoucí kapalině [5] a současném určování teplotních a rychlostních profilů v proudící kapalině [6].

3.5. Jednokanálová TR

Podstatnou nevýhodou dosud popisovaných principů a jejich aplikací je potřeba náročného a drahého vybavení, které zřejmě nebude moci být v dohledné době součástí běžného průtokoměru. Další zjednodušení je však možné a je založeno na následujících úvahách:

Účinnost zaostřování svazku generovaného TRM je částečně určena tím, jak velká část zvukového pole může být složeným snímačem zachycena, tj. aperturou snímače. Ke zvýšení efektivní apertury snímače lze však použít vlnovodu, neboť pomocí odrazů ve vlnovodu lze dosáhnout toho, že elementy snímače zasáhne větší část snímaného zvukového pole. Použitím vhodného vlnovodu lze tak snížit počet elementů snímače, v krajním případě až na jeden [7].

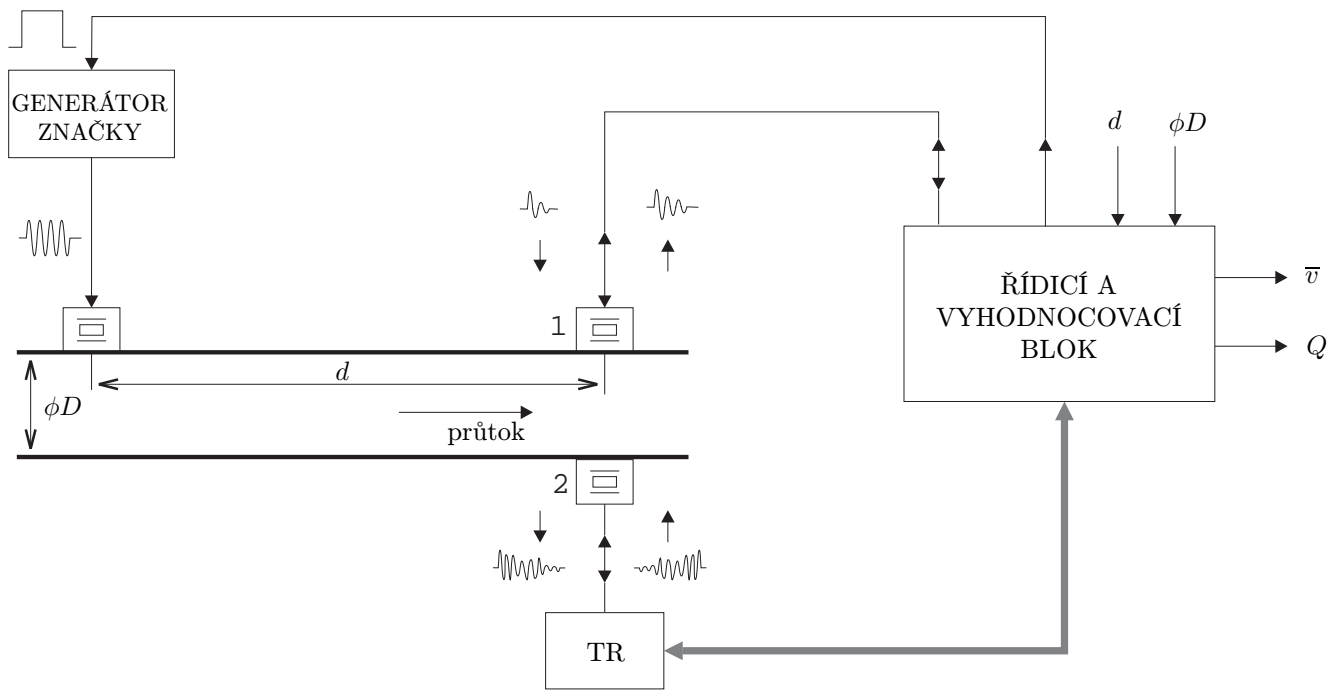
Z jiného pohledu na roli vlnovodu v TR experimentu lze říci, že mnohonásobné odrazy podél hranice vlnovodu hrají podobnou roli jako mnohonásobné odrazy v prostředí s náhodně rozloženými nehomogenitami (kap. 3.3) a zvětšují tak zdánlivou aperturu měniče.

Podobně můžeme uvažovat o vlnách uzavřených v odrazové dutině. Zaručují-li okrajové podmínky udržení veskeré informace přenášené vlněním uvnitř dutiny, absorpce uvnitř dutiny je zanedbatelná, míšení vlnění je možné a proces je ergodický, lze očekávat, že celou obsaženou informaci lze postupně přechytit v jediném bodě dutiny. Je tedy možné v tomto případě realizovat TR proceduru jednokanálově, tedy pouze s jedním měničem [8]. Signál se zaznamenává (delší dobu!) v jednom bodě a jeho časově reverzovaná verze je pak z téhož bodu zpětně vysílána a konverguje k místu původního vybuzení (k vybuzení signálu je přirozené použít další měnič).

Existence velkého počtu odrazů a signálových cest v uzavřené dutině („chaotická dynamika“) není tedy při jednokanálové TR překážkou. Naopak, je nezbytná a zajišťuje ergodicitu procesu. Právě využitím velkého počtu odrazů dosahuje jednokanálová TR lepšího zaostření, než by umožnila vlastní apertura jediného měniče, a které je srovnatelné se zaostřením dosahovaným uzavřenou TRC¹ (kap. 3.2).

Na příkladu jednokanálové TR je též zřetelněji vidět rozdíl mezi TR a fázovou konjugací (kap. 3.1). Monochromatická vlna, vysílaná všesměrovým měničem z libovolného

¹K experimentálnímu ověření je zapotřebí uspořádání umožňující zviditelnění vlnění. Na místo podélných vln se ve 3D objektech proto používá ohybových vln na destičkách. Takové vlny lze snadno zviditelnit pomocí laserového interferometru a dosáhnout tak působivé podívané, při níž z chaoticky rozkmitaného povrchu destičky postupně vzniká uspořádaná vlna stahující se do bodu, v němž byla původně vybuzena.



Obrázek 5: Schematické uspořádání průtokoměru s jednokanálovou TR

místa do dutiny, nebude nikdy konvergovat do jiného bodu v této dutině. Konvergence je možná jen při použití širokopásmových impulsů s mnoha vlastními módy v pracovním kmitočtovém pásmu měniče.

4. Detekce značek s jednokanálovou TR

Jak je zřejmé z obr. 2, mají uspořádání měničů i vlastností prostředí v průtokoměru jistou podobnost se situací potřebnou pro využití jednokanálové TR. Cylindrická geometrie případu sice nezaručuje udržení veškeré informace v oblasti, ale narušení tohoto principu nemusí být při malých průměrech trubice kritické. Mnohonásobné odrazy v oblasti jsou zajištěny, ztráty absorpcí v malém množství čisté kapaliny nejsou velké.

Navrhujeme proto použití jednokanálové TR k detekci termálních značek podle uspořádání v obr. 5. Činnost systému lze stručně popsat následovně:

1. Při vypnutém značkování se provede po montáži měničů na potrubí úvodní test měřeného objektu, který má za cíl zaznamenat míru narušení TR bez přítomnosti značky.
2. Po vygenerování značky se periodickou TR testuje, kdy míra narušení TR překročila hodnoty z testu (při nedostatečné citlivosti je možné využít i iterativní TR). Na základě této informace se vyhodnocuje doba průchodu značky měřícím úsekem a s pomocí vložených konstant d , ϕD pak průměrná průtoková rychlost a objemový průtok.

Podrobný popis činnosti

Systém realizuje postupně následující procedury:

A. Vypnuté značkování:

1. (a) Vyslání krátkého širokopásmového impulsu (cca 0,5–1 ms) do trubice s kapalinou prostřednictvím širokopásmového měniče 1.
- (b) Přijetí signálu vzniklého mnohonásobnými odrazy vyslaného impulsu v trubici i v kapalině prostřednictvím identického měniče 2 na protější straně trubice. Digitalizace přijatého signálu a uložení do paměti.
2. (a) Vyslání časově reverzovaného signálu měničem 2.
- (b) Příjem signálu měničem 1. Digitalizace přijatého signálu a uložení do paměti. Označení takto vzniklého souboru (např. „vzorek 1“).
3. Opakování procedury 1 až 2b a uložení souboru („vzorek 2“).
4. Vzájemné porovnání vzorků 1 a 2 (např. korelační). Uložení souboru vyjadřujícího míru odlišnosti vzorků.
5. Několikanásobné opakování procedury 1 až 4. Vyhodnocení vzájemných odchylek vzorků, stanovení přípustného pásma odchylek – stanovení standardu, definujícího prostředí beze značky.

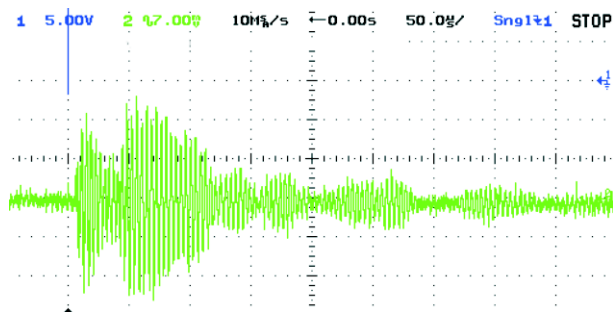
B. Po vygenerování značky:

1. (a) Provedení kroků A 1 a 2.
- (b) Porovnání naměřeného vzorku se standardem získaným z testu. Překročení standardní odchylky charakterizuje průchod značky.
2. (a) Násobné ($N \geq 2$) opakování kroku B 1.

- (b) Vyhodnocení časového okamžiku průchodu značky z opakovaného překračování standardních odchylek.
- (c) Určení průměrné průtokové rychlosti, popř. objemového průtoku.

4.1. Experimentální ověřování

Dosud byla realizována jednak dílčí měření časových průběhů impulsů, zaznamenaných po průchodu trubicemi z různých materiálů naplněných vodou, a dále část řídicího bloku průtokoměru. Z provedených měření je na obr. 6 uveden typický průběh vzniklý průchodem měděnou trubičkou o vnějším průměru 8,5 mm a tloušťce stěny 0,75 mm. Pro měření byly použity málo tlumené měniče o $f_0 = 2,5$ MHz, vysílací měnič byl buzen impulsy o délce 50 ns. Tvar zaznamenaných průběhů vcelku odpovídá očekávání a doba jejich trvání (v celém souboru měření od 0,5 do 0,8 ms) je základem pro následující odhad časové realizovatelnosti procedur. Pro experimenty s vlastní TR a vyhodnocování signálů nejsme zatím dostatečně vybaveni.



Obrázek 6: Typický průběh impulsu po průchodu mezi měniči průtokoměru

4.2. Časová realizovatelnost procedur

Na horním okraji předpokládaného měřicího rozsahu $\bar{v} = 30$ mm/s je při relativní chybě cca 1% nutné stihnout detekci značky za přibližně 30 ms. K detekci je zapotřebí alespoň dvou kroků B1a ($N = 2$) v reálném čase a jedné procedury B1b a B2b realizovatelné i později. Za předpokladu, že A1a je spolu s dobou průchodu impulsu trubicí proti ostatním procedurám zanedbatelná a doba záznamu signálu pro TRM na přijímací straně postačí cca 1 ms (kap. 4.1,[3]), jsou z fyzikální podstaty neovlivnitelné kroky:

A1b	≈ 1 ms
A2a,b	≈ 1 ms
B1a celkem	≈ 2 ms
B1a pro $N = 2$	≈ 4 ms (s rezervou cca 5 ms)

Na čistě výpočetní operace B1b a B2a,b tak zbývá cca 25 ms. Uvažujeme-li o digitalizaci se vzorkovacím kmitočtem 10 MHz a 1 Byte/vzorek s dobou trvání 1 ms, budou výpočetní operace prováděny se soubory o velikosti

cca 10 kB a uvedený čas je při současné úrovni výpočetní techniky více než dostatečný. S lepším vybavením je pak možno pracovat s větší hodnotou N nebo využít iterativní TR, s horším realizovat výpočty off-line, popř. adaptivně podle skutečné průtokové rychlosti.

5. Závěr

Předložené řešení problémů spojených s ultrazvukovou detekcí indukovaných termálních značek v kapalinovém průtokoměru na rozdíl od předchozích řešení mnohonásobných odrazů v trubici využívá a nesnaží se je nikterak potlačit. Vyžaduje však rozsáhlejší HW i SW vybavení i výzkumnou kapacitu pro experimentální ověření, které dosud nebylo v plné šíři realizováno.

Poděkování

Tento výzkum je podporován výzkumným záměrem číslo J04/98:212300016.

Reference

- [1] Malinský, K., Plocek, J.: A new kind of ultrasonic flowmeter for measuring small flow rates, *35th International Conference on Ultrasonics and Acoustic Emission*, Třešť, (Czech Republic), September 14–18, 1998.
- [2] Fink, M.: Time-Reversal of Ultrasonic Fields – Part I: Basic Principles, *IEEE Trans. on Ultrason. Ferroelec., and Freq. Contr.*, vol. 39, no. 5, pp.555–566, 1992.
- [3] Derode, A., Roux, P., and Fink, M.: Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering, *Physical Review Letters*, 75(23), 4206–4209, 1995.
- [4] Prada, C., Lartillot, N., Fink, M.: Selective Focusing in Multiple Target Media: The Transfer Matrix Method, *Proc. of 1993 IEEE Int. Ultrasonics Symposium*, pp. 1139–1142, (Baltimore, USA), 1993.
- [5] Roux, C., Fink, M.: Vorticity Measurements with an Acoustic Time-Reversal Mirror, *Proc. of 1996 IEEE Int. Ultrasonics Symposium*, pp.1249–1254, (San Antonio, TX, USA), 1996.
- [6] Carlson, J., Bouchet, G., Maurel, A.: Simultaneous Characterisation of Velocity and Temperature Profiles Using Time-Reversal, *Proc. of 17th Int. Congress on Acoustic, ICA 2001*, Session 4A.01, (Rome, Italy), September 2–7, 2001.
- [7] Ing, L. K., Catheline, S., Quieffin, N., Fink, M.: Dynamic Focusing Using a Unique Transducer and Time Reversal Process, *Proc. of The 8th Int. Congress on Sound and Vibration*, pp. 119–126, (Hong Kong, China), 2–6 July, 2001.
- [8] Draeger, C., Fink, M.: *Phys. Rev. Lett.*, 79, 407 (1997).

Akustické listy: ročník 9, číslo 4 prosinec 2003

ISSN: 1212-4702

Vydavatel: Česká akustická společnost, Technická 2, 166 27 Praha 6

Vytisklo: Ediční středisko ČVUT

Počet stran: 28

Počet výtisků: 200

Redakční rada: M. Brothánek, O. Jiříček, J. Kozák, R. Čmejla, F. Kadlec, J. Štěpánek, P. Urban

Jazyková úprava: R. Štěchová

Uzávěrka příštího čísla Akustických listů je 27. února 2004.

© ČsAS
NEPRODEJNÉ!