ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

107. AKUSTICKÝ SEMINÁŘ

26.-28. května 2025

Martinice

*

Redakce sborníku:

Marek Brothánek, Radka Svobodová

Sborník 107. akustického semináře

Redakce sborníku: Ing. Marek Brothánek, Ph.D. Mgr. Radka Svobodová

Vytištěno pro potřeby 107. akustického semináře, konaného ve dnech 26.–28. května 2025 v Martinicích.

Příspěvky otištěné ve sborníku nebyly redakčně upravovány. Redakce neodpovídá za obsah jednotlivých příspěvků a nezasahuje do jejich znění, neprovádí jazykové ani stylistické úpravy.

Copyright © České vysoké učení technické v Praze, 2025

ISBN 978-80-01-07421-3

Náklad 200 výtisků, počet stran 56, pořadí vydání 1. Tisk: REPRO FETTERLE s. r. o., náměstí Na Santince 2440/5, 160 00 Praha 6

Obsah

Jiří Bečka	
Akustika v kontextu udržitelného rozvoje	5
Jiří Bečka, Jiří Nováček	
Použití obnovitelných a recyklovaných materiálů	
ve zvukově izolačních lehkých příčkách – část I.	13
Aneta Furmanová a Viktor Hruška	
Využití umělých neuronových sítí v prostorové akustice	23
Petr Honzík	
Redukce nelineárního zkreslení kondenzátorových mikrofonů	31
Viktor Hruška. Aneta Furmanová a Tereza Filipská	
Objevování nelineárních vlnových rovnic z dať	37
Václav Vencovský	
Tartiniho tóny a čtyři desetiletí objektivní diagnostiky poruch sluchu	46



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Akustika v kontextu udržitelného rozvoje

Jiří Bečka

ČVUT–FSv, Thákurova 2077/7, 166 29 Praha 6

jiri.becka@fsv.cvut.cz, becka.j@kontrahluk.cz

Abstract This paper introduces the topic of sustainable development and how it has been perceived by the acoustics research community. Various articles and the subject of their research are presented. The review serves as a basis for the author's subsequent research.

1 ÚVOD

V posledních letech, respektive desetiletích, se po celém světě velice rychle rozvíjí přístup, který klade důraz na udržitelnost životního prostředí. Přestože mají mnozí jistě ještě stále v čerstvé paměti, že někteří státní představitelé tento přístup příliš nepodporují a při obměně politického aparátu státy dokonce odstupují od mezinárodních dokumentů, kterými se k udržitelnosti přímo zavazovaly, lze tento přístup považovat za trend současnosti. Zároveň se dá očekávat jeho další budoucí rozvoj.

Autorův výzkum v rámci doktorského studia má za cíl spojit oblast akustiky a zmiňované udržitelnosti. Před samotným výzkumem bylo přirozeně nutné provést rešerši na dané téma. Poznatky této rešerše budou nyní představeny. Příspěvek nemá ambici obsáhnout veškeré současné vědění v této problematice. Jedná se o skromná autorova zjištění, kterých se mu podařilo ve svém hledání dopátrat.

2 UDRŽITELNÝ ROZVOJ

Otázka životního prostředí začala být intenzivněji řešena v 70. letech 20. století, kdy vyvstaly problémy se znečištěním ovzduší, vody a půdy. První větší celosvětovou diskusi představovala konference OSN o životním prostředí ve Stockholmu v roce 1972 [1]. Ve studii Naše společná budoucnost [2], tzv. Zprávě Brundtlandové z roku 1987, která měla vliv na další politiku EU, byl definován pojem "udržitelného rozvoje" (sustainable development). Jedná se o "*rozvoj, který uspokojuje potřeby současnosti, aniž by ohrožoval schopnost budoucích generací uspokojovat své vlastní potřeby*" [3].

Následovala konference OSN o životním prostředí a rozvoji v Rio de Janeiru v roce 1992 [4] a velmi důležitý Kjótský protokol [5], který byl jako první mezinárodní závazek k omezení emise skleníkových plynů přijat již v roce 1997, ale v platnost vstoupil až v roce 2005 [6]. Pařížská dohoda [7] z roku 2015 je podstatným klimatickým závazkem, který cílí na udržení globálního oteplování pod 2 °C oproti předindustriální úrovni a usiluje o jeho omezení na 1,5 °C. Z poslední doby je známý plán EU pod názvem Zelená dohoda pro Evropu (European Green Deal) [8], jehož hlavním záměrem je dosažení uhlíkové neutrality do roku 2050.

Jak je patrno, pojem udržitelného rozvoje se postupně v průběhu let stále intenzivněji dostával do popředí všeobecného zájmu a v současné době je neopomíjitelný. Mnoho firem provádí inovace svých výrobků, do kterých se snaží zahrnout menší množství neobnovitelných zdrojů, a snížit tak celkovou spotřebu primární energie a celkových emisí skleníkových plynů.

V České republice jsou na základě mezinárodních dokumentů o ochraně životního prostředí zavedeny mnohé dokumenty a strategie, z nichž nejzajímavější je pro účely této rešerše Strategický rámec cirkulární ekonomiky České republiky 2040 [9], vydaný Ministerstvem životního prostředí. Jeho nadstavbou (implementačním dokumentem) je pak vládou v roce 2023 schválený Akční plán Cirkulární Česko 2040 pro období 2022-2027 [10].

Hlavním cílem Strategického rámce je formulovat předpoklady pro to, aby byla Česká republika prostřednictvím cirkulární ekonomiky (tzv. oběhového hospodářství) dlouhodobě odolná vůči budoucím environmentálním hrozbám včetně změny klimatu a úbytku biodiverzity a rozvíjela celkově udržitelný společenský systém. Udává tak směr rozvoje země pro příští desetiletí v oblasti oběhového hospodářství v reakci na rostoucí spotřebu materiálů a zdrojů a nutnost přijmout nezbytná přísnější opatření v oblasti účinnosti využívání zdrojů a oběhového hospodářství.

Strategický rámec stanovuje 10 prioritních oblastí a jednou z nich je právě stavebnictví (resp. s tématem výzkumu souvisí v tomto kontextu další oblast, a to odpadové hospodářství). Stavebnictví (a demoliční práce) představuje největší zdroj v množství produkovaných odpadů ze všech sektorů, přičemž se odhaduje, že je zodpovědné za více než 35 % celkové produkce odpadů v EU. V České republice dokonce tento odpad v roce 2020 tvořil téměř 59 %. Snahou je se těchto odpadů nezbavovat, ale znovu je využít. Cíl pro využití stavebních odpadů podle čl. 11 směrnice o odpadech, který je stanoven na minimálně 70 %, je v posledních letech v ČR plněn. Z větší části jsou ale odpady využity k zasypávání a přirozeně vhodnější by bylo zlepšení v nakládání se stavebními materiály a odpady, aby byly vráceny zpět v rámci použití přímo ve stavbách. Potřebné je také investovat do inovativních technologií, které umožní recyklaci i v současnosti těžko využitelných odpadů. Hlavními opatřeními v rámci stavebnictví jsou pro shrnutí dle Strategického rámce:

- 1. Do roku 2040 ztrojnásobit míru oběhového využití materiálu ve srovnání s úrovněmi roku 2017,
- 2. zvyšovat podíl zpětně navrácených surovin na celkové spotřebě surovin v ČR,
- 3. podporovat využití druhotných recyklovaných materiálů ve výrobních procesech,
- 4. optimalizovat průmyslové procesy s ohledem na předcházení vzniku odpadů a jejich eliminaci,
- 5. podporovat inovace a vývoj nových materiálů, postupů a technologií za účelem zajištění jejich cirkularity a snižování materiálové náročnosti.

Společně s významnou recirkulací materiálů, podpořenou vysoce kvalitní recyklací, se předpokládá zvýšení účinnosti stavebních materiálů, tedy snížení množství spotřebovávaných materiálů, z čehož plyne i snížení množství následně produkovaných odpadů. Stavební suroviny jsou v ČR těženy v největším objemu (64 mil. tun v roce 2019 – nejdůležitějšími komoditami zde byly stavební kámen a štěrkopísky), přičemž vývoj jejich těžby je úzce spjat s vývojem stavební výroby.

Strategický rámec pak spatřuje stávající budovy jako "budoucí banky materiálů". Zároveň si ale uvědomuje, že například u dodatečných zateplení budov je vhodné zvážit náhradu uměle vytvořených izolačních materiálů za materiály přírodního původu, které ve větší míře ukládají oxid uhličitý (CO2) a mají nižší dopad na životní prostředí během celého životního cyklu. Pro vyhodnocování dopadů slouží tzv. LCA (Life Cycle Assessment) dle ČSN EN ISO 14040.

Postupně také vzrůstá úloha dřevostaveb a tím i snižování nároku na neobnovitelné suroviny. Zdroje dřeva jsou obnovitelné a dřevěné domy mohou dosahovat dlouhé životnosti s tím, že jsou známy způsoby pro opětovné použití dřevěných částí. Předpokladem použití dřevěných konstrukcí je jejich lokální původ a použití bez chemických úprav, které mohou být příčinami civilizačních chorob [9].

3 AKUSTIKA V KONTEXTU UDRŽITELNÉHO ROZVOJE

V souladu se vzrůstajícím požadavkem na udržitelný rozvoj životního prostředí se začala tato problematika objevovat i v odborných článcích a studiích, spojených s tématem akustiky. Z literatury lze vysledovat, že jedny z prvních akustických publikací, hovořících o udržitelném rozvoji, se začaly objevovat přibližně okolo roku 2005 [11,12], kdy vstoupil v platnost Kjótský protokol. V posledních 10 letech pak dochází k výraznému nárůstu odborné literatury z oblasti akustiky, která spojuje výzkum s využitím recyklovaných a obnovitelných materiálů.

Poptávka po různých řešeních, která přispějí efektivně k ochraně životního prostředí, roste a vyvíjený tlak na výrobce je každým rokem vyšší. Například Knauf již v Česku představil desku WHITE ONE [13], u které byl při výrobě snížen podíl neobnovitelných primárních zdrojů. S tím samozřejmě ale přichází zmenšení objemové hmotnosti, které má vliv na nižší neprůzvučnost R (dB) takové desky.

V současné době se též testují na různé technické parametry (včetně těch akustických) desky z mycelia (podhoubí), které mohou fungovat jako izolační materiál.

Zkoumány již byly materiály jako ovčí vlna [11,12,14,15,16,17], konopí, len, celulózová vlákna, kokosová vlákna [11,16,17], korek [16,18] textilní vlákna [16,22,25], sláma [16,23] a další. Uvažovalo se jejich využití přímo ze surovin (obnovitelné materiály), resp. recyklace (především u vláken). Smysluplné je také využití lokálních surovin, které nemají v dané zemi aktuálně jiné využití – např. využití recyklovaného ethylen vinyl acetátu (EVA), významného odpadního polymeru z produkce bot v Brazílii, jako sypké (granulované) kročejové podložky [19]. Spojení EVA s rýžovými slupkami v různých poměrech a vliv na dynamickou tuhost podložek sledoval Borges a kol. [20].

Akusticky byl dokonce zkoumán i lehčený beton s využitím přírodních vláken v matrici v podobě ozdobnice obrovské (po celém světě rozšířená travina) [21]. Zajímavé využití lokálních surovin provedli výzkumníci z Maroka [23], kteří vyráběli kompozitní akustické panely z odpadních kartonů (60% hmotnostní podíl) a různých v Maroku běžných přírodních vláken (40% hmotnostní podíl), kterými byly pšeničná sláma, rákos, esparto, bagasa (z cukrové třtiny), fikovník a olivovník. Asdrubali a kol. [24] zase sledovali akustické a tepelně technické parametry u desek z rákosí, orobince, kukuřičných klasů, recyklované bavlny, datlové i olejné palmy, durianu, ananasových listů, slunečnice, slámy a rýže.

Segura a kol. [26] zašli dokonce ještě dál a zkoušeli panely z mnoha spojených pecek plodů oliv, broskví, třešní a meruněk, vždy spojených s kokosovými vlákny. Zde dochází až k extrémnímu způsobu využití komunálního odpadu z ovoce. Íránský tým vědců [27] přidal do svého výzkumu pecky z datlí a švestek a celý experiment ještě vylepšil, když porovnal stav, kdy jsou pecky vcelku a naopak když jsou zcela rozdrcené (ilustrativně viz obrázek 1), přičemž v rozdrceném stavu vykazovaly panely lepší akustické vlastnosti.

Podobný tým z Íránu [28] také sledoval možnost využití drcených polypropylenových roušek, jejichž odpadní množství se po propuknutí nemoci COVID-19 ve světě neúměrně zvýšilo. Z drti opět vyráběli panely a sledovali jejich akustické a tepelně technické vlastnosti.

V Malajsii použili prach z lokálních kmenů palmy olejné a přimíchali jej s polyuretanem, čímž docílili materiálu, který je vhodně použitelný jako například pohltivý obklad na snížení doby dozvuku a hlučnosti ve vnitřních prostorech [29].



B: Apricot Obrázek 1. Panely z meruňkových ne/rozdrcených pecek pro akustické zkoušky [27]

4 ZÁVĚR

Z literatury je patrné, že akustika a udržitelný rozvoj není již zcela nejnovější téma, ale rozhodně je to téma, které se neustále vyvíjí a posouvá vpřed a do budoucna lze očekávat jeho další rozvoj. Ve výše citovaných akustických článcích jsou povětšinou vyráběny malé vzorky, u kterých se pak mimo jiné technické parametry experimentálně sleduje (v prakticky každé studii zastoupená) zvuková pohltivost, vyjádřená činitelem zvukové pohltivosti α (-). Hodnoty tohoto činitele se různí, mohou nabývat velmi dobrých i nízkých hodnot v závislosti na materiálu. Často se nad těmito tzv. "metamateriály" uvažuje jako nad možnými tepelnými izolanty (sleduje se součinitel tepelné vodivosti λ (W.m⁻¹.K⁻¹)) do obvodových stěn, resp. jako výplněmi do vnitřních stěn.

Dle provedené rešerše se tak o možnosti využití obnovitelných a recyklovaných materiálů z hlediska akustiky dobře ví, ale dosud se v odborné literatuře nikde pořádně neřešilo jejich vhodné začlenění například do lehkých stavebních konstrukcí stěn z hlediska vzduchové neprůzvučnosti.

Kupříkladu Massoudinejad a kol. [30] si sice uvědomují potenciál recyklace odpadů (průmyslových, zemědělských, stavebních, komunálních) a jejich zvukoizolační využití u stavebních konstrukcí, ale článek se opět omezuje na samotnou zvukovou pohltivost a do testů, zkoumajících konkrétní konstrukce a jejich neprůzvučnost, se nepouští.

Běžná lehká dělicí konstrukce mívá v sobě většinou jako výplň minerální vlákna nebo dřevovláknité desky. Recyklované a obnovitelné materiály jsou v oblasti zvukoizolačních prvků určených pro dělicí stavební konstrukce stále málo využívány, při-čemž efektivnost tohoto řešení může být z pohledu cena–výkon velice zajímavá. Je tak zajímavou otázkou, zda neexistují lepší řešení, než ta, která jsou v dnešní době stále aktuální.

K takovému cíli by měl směřovat samotný výzkum. Výzkum je zaměřen na taková řešení lehkých dělicích konstrukcí stěn, která dovedou akusticky plně nahradit (nebo dokonce předčit) současná řešení. Zároveň ale tato řešení s výhodou podporují současný trend udržitelného rozvoje a napomáhají ke snižování primární energie a emisí skleníkových plynů. K tomu by měly sloužit právě obnovitelné nebo recyklované materiály. Jejich využití je předpokládáno především v podobě výplní lehkých dělicích stěn.

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS 25/007/OHK1/1T/11.

REFERENCE

- [1] United Nations. Report of the United Nations Conference on the Human Environment: Stockholm, 5-16 June 1972. 1973.
- [2] Brundtland, Gro Harlem. "Brundtland report. Our common future." *Comissão Mundial* 4, no. 1 (1987): 17-25.
- [3] Handl, Günther. "Declaration of the United Nations conference on the human environment (Stockholm Declaration), 1972 and the Rio Declaration on Environment and Development, 1992." *United Nations Audiovisual Library of International Law* 11, no. 6 (2012): 1-11.
- [4] Declaration, Rio. "Rio declaration on environment and development." (1992).
- [5] Protocol, Kyoto. "Kyoto protocol." UNFCCC Website. Available online: http://unfccc. int/kyoto_protocol/items/2830. php (accessed on 1 January 2011) (1997): 230-240.
- [6] Grubb, Michael. "The economics of the Kyoto Protocol." In *The Economics of Climate Change*, pp. 92-134. Routledge, 2004.
- [7] Agreement, Paris. "Paris agreement." In report of the conference of the parties to the United Nations framework convention on climate change (21st session, 2015: Paris). Retrived December, vol. 4, no. 2017, p. 2. Getzville, NY, USA: HeinOnline, 2015.
- [8] Fetting, Constanze. "The European green deal." *ESDN Report, December* 2, no. 9 (2020).
- [9] Ministerstvo životního prostředí [online]. "Strategický rámec cirkulární ekonomiky České republiky 2040". Link: https://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/news_ 20211213_Vlada-schvalila-Cirkularni_Cesko_2040/\$FILE/Cirkul%C3%A1rn%C3%A D%20%C4%8Cesko_2040_web.pdf
- [10] Ministerstvo životního prostředí [online]. "Akční plán Cirkulární Česko 2040 pro období 2022-2027". Link: https://www.mzp.cz/C1257458002F0DC7/cz/news_2023 0621_Cirkularnimu-Cesku-jsme-o-krok-bliz-Vlada-schvalila-prvni-Akcni-plan-procirkularni-ekonomiku-do-roku-2027/\$FILE/AP_C%C4%8C_2040.pdf
- [11] Desarnaulds, Victor, Ezilda Costanzo, António Carvalho, and Blaise Arlaud. "Sustainability of acoustic materials and acoustic characterization of sustainable materials." In *Proceedings of the 12th international congress on sound and vibration*. 2005.
- [12] Asdrubali, Francesco. "Survey on the acoustical properties of new sustainable materials for noise control." In *Proceedings of Euronoise*, vol. 30, pp. 1-10. 2006.
- [13] KNAUF Praha, spol. s r.o. [online]. WHITE ONE: Sádrokartonová deska vyrobená s ohledem na udržitelnost zdrojů a snížení CO2 emisí. 2023. Link: https://www.knauf.cz/file/7876-k711-one-cz

- [14] Zach, Jiří, Azra Korjenic, Vít Petránek, Jitka Hroudová, and Thomas Bednar. "Performance evaluation and research of alternative thermal insulations based on sheep wool." *Energy and Buildings* 49 (2012): 246-253.
- [15] Patnaik, Asis, Mlando Mvubu, Sudhakar Muniyasamy, Anton Botha, and Rajesh D. Anandjiwala. "Thermal and sound insulation materials from waste wool and recycled polyester fibers and their biodegradation studies." *Energy and buildings* 92 (2015): 161-169.
- [16] Pedroso, M., J. De Brito, and J. D. Silvestre. "Characterization of eco-efficient acoustic insulation materials (traditional and innovative)." *Construction and Building Materials* 140 (2017): 221-228.
- [17] Asdrubali, Francesco, Samuel Schiavoni, and K. V. Horoshenkov. "A review of sustainable materials for acoustic applications." *Building Acoustics* 19, no. 4 (2012): 283-311.
- [18] Di Monte, Roberta, Marco Caniato, Ilan Boscarato, Jan Kaspar, and Orfeo Sbaizero. "Green cork-based innovative resilient and insulating materials: Acoustic, thermal and mechanical characterization." In *Proceedings of meetings on acoustics*, vol. 19, no. 1. AIP Publishing, 2013.
- [19] Zuchetto, Letícia K., MF de O. Nunes, and B. F. Tutikian. "Dynamic Stiffness evaluation of floor covering system made out of recycled EVA–Ethylene Vinyl Acetate." In *INTER-NOISE CONGRESS & EXPOSITION ON NOISE CONTROL* ENGINEERING, vol. 44. 2015.
- [20] Borges, Joice Kras, Fernanda Pacheco, Bernardo Tutikian, and Maria Fernanda De Oliveira. "An experimental study on the use of waste aggregate for acoustic attenuation: EVA and rice husk composites for impact noise reduction." *Construction and Building Materials* 161 (2018): 501-508.
- [21] Chen, Yuxuan, Q. L. Yu, and H. J. H. Brouwers. "Acoustic performance and microstructural analysis of bio-based lightweight concrete containing miscanthus." *Construction and Building Materials* 157 (2017): 839-851.
- [22] Rubino, Chiara, Marilés Bonet Aracil, Jaime Gisbert-Payá, Stefania Liuzzi, Pietro Stefanizzi, Manuel Zamorano Cantó, and Francesco Martellotta. "Composite ecofriendly sound absorbing materials made of recycled textile waste and biopolymers." *Materials* 12, no. 23 (2019): 4020.
- [23] Ouakarrouch, Mohamed, Said Bousshine, Abdelmajid Bybi, Najma Laaroussi, and Mohammed Garoum. "Acoustic and thermal performances assessment of sustainable insulation panels made from cardboard waste and natural fibers." *Applied Acoustics* 199 (2022): 109007.
- [24] Asdrubali, Francesco, Francesco D'Alessandro, and Samuele Schiavoni. "A review of unconventional sustainable building insulation materials." *Sustainable Materials and Technologies* 4 (2015): 1-17.
- [25] Islam, Shafiqul, and Gajanan Bhat. "Environmentally-friendly thermal and acoustic insulation materials from recycled textiles." *Journal of environmental management* 251 (2019): 109536.

- [26] Segura, J., I. Montava, E. Juliá, and J. M. Gadea. "Acoustic and thermal properties of panels made of fruit stones waste with coconut fibre." *Construction and Building Materials* 426 (2024): 136054.
- [27] SheikhMozafari, Mohammad Javad, Ebrahim Taban, Parham Soltani, Mohammad Faridan, and Ali Khavanin. "Sound absorption and thermal insulation performance of sustainable fruit stone panels." *Applied Acoustics* 217 (2024): 109836.
- [28] Dehdashti, Zahra, Parham Soltani, and Ebrahim Taban. "Utilizing discarded face masks to fabricate sustainable high-performance panels for enhanced building thermal and acoustic comfort." *Journal of Cleaner Production* 446 (2024): 141304.
- [29] Lubis, Abdul Munir Hidayat Syah, Azma Putra, Ahmad Shah Hizam Md Yasir, Irianto Irianto, and Safarudin Gazali Herawan. "Structural and acoustical performances of oil palm trunk waste–Elastomeric thermoplastic polyurethane composite." *Heliyon* 10, no. 5 (2024).
- [30] Massoudinejad, Mohamadreza, Nazak Amanidaz, Rafael M. Santos, and Reza Bakhshoodeh. "Use of municipal, agricultural, industrial, construction and demolition waste in thermal and sound building insulation materials: A review article." *Journal of Environmental Health Science and Engineering* 17 (2019): 1227-1242.



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

26. – 28. května 2025

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Použití obnovitelných a recyklovaných materiálů ve zvukově izolačních lehkých příčkách – část I.

Jiří Bečka, Jiří Nováček

ČVUT–FSv, Thákurova 2077/7, 166 29 Praha 6

jiri.becka@fsv.cvut.cz, jiri.novacek@fsv.cvut.cz

Abstract The research deals with the possible use of renewable and recycled materials in wall elements considering their acoustic performance. More specifically, it focuses on the airborne sound insulation of lightweight partition walls in contemporary timber-framed or prefabricated buildings. This paper introduces the first part of the research, which is based on the previous author's review.

1 ÚVOD

V současnosti jsou ve stavebnictví pro budování rodinných domů (resp. i bytových domů) čím dál oblíbenější dřevostavby, především ve variantách, u kterých lze využít částečné či plné prefabrikace, která umožní rychlejší a kompaktnější řešení. Lehké dělicí konstrukce na bázi dřeva jsou využitelné i ve stavbách se skeletovým systémem, u kterých je opět prefabrikace poměrně důležitým aspektem.

Běžná řešení lehkých stěn dřevostaveb zajišťují obecně nižší zvukovou izolaci oproti standardním železobetonovým a zděným konstrukcím, a musí se pro ně proto hledat mnohdy komplikovaná systémová řešení, díky kterým se konstrukce dřevostaveb z hlediska zvukové izolace alespoň trochu přiblíží hodnotám běžných staveb.

Slabým místem těchto stěn je pak především oblast nízkých frekvencí, což má za následek horší subjektivní vnímání.

Předmětem výzkumu je tak najít takové konfigurace, které mohou tradiční konstrukce lehkých stěn nahradit a ideálně i zmíněné nedostatky z hlediska akustiky zlepšit. Toho chce docílit právě s využitím obnovitelných a recyklovaných materiálů, což podporuje současný přístup mnoha zemí k rychle se rozvíjející oblasti, kladoucí důraz na udržitelnost životního prostředí. Společnou výzvou je mimo jiné hledání nových možností, jak nakládat s odpadními materiály z demolic staveb a z výroby, či s materiály, jejichž primární funkce již ztratila význam, a jsou tak přebytečné. Neméně podstatné je vyšší využití obnovitelných materiálů, jejichž životní cyklus je méně náročný pro životní prostředí, než je tomu u materiálů, které využívají pro svou výrobu neobnovitelné primární zdroje surovin.

Na trhu se již dnes nachází několik zajímavých materiálů, jejichž využití je však dosud malé. Spousta odpadních materiálů ze stavebnictví navíc ani nenachází další možná uplatnění. Využity mohou být ale jako výplně lehkých dělicích stěn. Pro počáteční analýzu, podle níž se bude výzkum dále vyvíjet, byly vybrány různé materiály jako výplň lehkých dělicích stěn. Představeny jsou v kapitole 3.

2 POPIS MĚŘICÍHO PRACOVIŠTĚ A PŘÍSTROJOVÉHO VYBAVENÍ

Všechna měření vzduchové neprůzvučnosti se uskutečnila v akustické laboratoři Univerzitního centra energeticky efektivních budov (UCEEB ČVUT) v Buštěhradě. Standardní provedení akustické laboratoře (splňující parametry dle ISO norem [1,2]) maximálně potlačuje přenos zvuku vzduchem bočními cestami, dominantním přenosem je tak pouze přímý přenos přes zkoušený vzorek. Měří se pak ideální vzduchová neprůzvučnost stavebního materiálu, stanovená jednočíselnou veličinou vážené (laboratorní) neprůzvučnosti R_w (dB).

Měřeno bylo dle ISO norem [3,4] v rozšířené zvukoizolační oblasti 50–5000 Hz s využitím umělého zdroje ve tvaru dvanáctistěnu se zesilovačem, který emituje tzv. růžový šum (pink noise).

Standardní dělicí stěna mezi komorami má plochu cca 10 m². Pro provedení experimentů by tak bylo spotřebováno příliš mnoho materiálu, obzvlášť zbytečné by to pak bylo u těch řešení, která se neprokážou pro další výzkum zajímavá. ČSN EN ISO 10140-5 [2] v tomto umožňuje měření na tzv. "specificky malém zkušebním otvoru". Jedná se o otvor o velikosti jen 1 250 x 1500 mm (šířka x výška) s maximální hloubkou (tloušťkou) 500 mm, který je vytvořen v dělicí stěně mezi komorami. Ta musí být dvojitá, aby byla zajištěna její vysoká vzduchová neprůzvučnost. Díky ní je umožněno přímé a objektivní měření vzduchové neprůzvučnosti samotného vzorku ve zkušebním otvoru – zvuk se přenáší vzduchem výhradně posuzovaným vzorkem.

Obrázek 1 znázorňuje stavebně dokončenou dvojitou stěnu, provedenou v Buštěhradě, včetně specificky malého zkušebního otvoru. Na obrázku 2 je pak ukázka zkušebního dřevěného rámu, který byl ve stěně osazen a zkoušen s různými výplňovými materiály. Pro lepší ilustraci je na zde uvedené fotografii rám bez záklopu.

Pro určování zvukové pohltivosti materiálů, určených jako výplň lehkých dělicích stěn, byly využívány testy v impedanční (Kundtově) trubici na FEL ČVUT. Trubice byly k měření zapotřebí dvě – s vnitřním průměrem 100 mm (pracovní kmitočtový rozsah 80–1630 Hz) a 40 mm (pracovní kmitočtový rozsah 500–4000 Hz). Měření podléhají pravidlům platných ISO norem [5,6], stanovuje se činitel zvukové pohltivosti při kolmém dopadu zvuku v třetinooktávových pásmech 80–4000 Hz.

Pohltivost různých výplňových materiálů významně souvisí s výsledky měření neprůzvučnosti panelů, které jsou v tomto příspěvku dále uvedeny. U sypkých materiálů pak dochází ke 1/4vlnné rezonanci.





Obrázek 1. Dvojitá stěna se zkušebním otvorem

Obrázek 2. Rám s výplní

3 VÝBĚR MATERIÁLŮ, POPIS MĚŘENÍ

Jak již bylo zmíněno, recyklované a obnovitelné materiály nejsou dosud příliš využívány jako zvukoizolační prvky dělicích stavebních konstrukcí, ačkoliv jejich větší podíl by byl zajímavý nejen z pohledu udržitelného rozvoje, ale bezpochyby také v poměru cena-výkon. Dle referencí [7,8], které provedly některé testy na vzduchovou neprůzvučnost lehkých dělicích konstrukcí stěn, lze konstatovat, že tradiční výplně stěny z minerální vlny jsou z akustického hlediska plně nahraditelné novými materiály obnovitelnými nebo recyklovanými. Zároveň byly v referencích stanoveny environmentální dopady těchto "udržitelnějších" výplní v porovnání s běžnými (minerální vlákna, EPS, XPS, pěnosklo, polyuretan a další). Na základě různých indikátorů bylo patrné, že obnovitelné a recyklované materiály za sebou zanechávají menší uhlíkovou stopu. Za zmínku také stojí, že i v současnosti u dřevostaveb běžně užívané dřevovláknité izolace a desky spotřebují poměrně hodně energie nejen na výrobu, ale i v průběhu životního cyklu.

Na základě rešerše a dostupnosti na českém trhu byly tak pro zkoušky pořízeny následující izolace:

- 1. dřevovláknité desky STEICO Flex tl. 80 mm,
- 2. minerální vata ISOVER PIANO TWIN tl. 80 mm,
- 3. minerální vata ISOVER PIANO TWIN tl. 100 mm,
- 4. konopné vlákno ECO FLEX tl. 80 mm,

- 5. lněné vlákno NATURIZOL tl. 80 mm,
- 6. ovčí vlna ISOLENA tl. 50 a 30 mm (celkem 80 mm),
- 7. slaměné balíky,
- 8. bavlněná vlákna EN-TEX (foukaná/sypaná izolace),
- 9. celulózová vlákna TEMPELAN (foukaná/sypaná izolace),
- 10. dřevovláknitá vlákna INSOWOOD (foukaná/sypaná izolace).

Dále byl jako 11. zkoumán materiál sypkého charakteru, konkrétně kuličky Liaporu.

Pro zkoušky těchto výplňových materiálů ve "specificky malém zkušebním otvoru" bylo vyrobeno 5 zkušebních dřevěných rámů z KVH hranolů (průřez 60x100 mm), s oboustranným opláštěním ze sádrovláknitých desek Rigips Rigidur tl. 12,5 mm. Celková tloušťka rámu byla 125 mm (12,5 mm SDV deska, 100 mm vzduchová mezera, vyplněná materiálem tl. 80/100 mm, 12,5 mm SDV deska). Jedná se o typickou lehkou (nosnou) konstrukci. Rám byl vždy vyplněn jiným materiálem a přichycen v přesné poloze do zkušebního otvoru mezi komorami (viz obrázek 2). Tloušťky výplně 100 mm ve vzduchové mezeře bylo dosaženo u materiálů 3, 7–10, 11. Panely byly v otvorech po obvodě oboustranně důkladně utěsněny v průběhu osvědčenou kombinací vaty, gumových těsnicích profilů (obrázek 18) a těsnicího tmelu. Zkoušek mělo být pro každý posuzovaný výplňový materiál provedeno vždy 5, ale již po druhé výplni byl tento počet zkoušek redukován pouze na 2, protože výsledky R_w (dB) byly pokaždé stejné většinou v rozmezí ± 0,5 dB, což je dostatečná přesnost pro ověření spolehlivosti zkoušek. Průběh křivky *R* i s charakteristickými poklesy byl navíc velmi podobný výsledkům, které získal měřením Asdrubali a kol. [7].

4 VÝSLEDKY PROVEDENÝCH MĚŘENÍ A JEJICH DISKUSE

Pro každý další izolační materiál tak byla provedena 2 měření. Provedeno bylo celkem 2x5 + 9x2 měření, tj. 28 měření. Jedná se o úvodní zkoušky, které měly za účel ověřit měřicí metodu a zároveň posoudit, do jaké míry se změní úroveň zvukové izolace typické dělicí stěny této skladby, pokud se nahradí minerální vlákna jinou výplní alternativní izolace z obnovitelného nebo recyklovaného materiálu.

Průměrné výsledky R_w se od sebe při použití jiné výplně mírně lišily. U panelu s jednoduchým rámem ovšem dominuje přenos zvuku dřevěnými sloupky a vodorovnými částmi rámu. Jeden z panelů tak byl dále rozdělen v polovině na dvě stejné části tl. 45 mm, mezi kterými vznikla vzduchová mezera tl. 10 mm – viz schéma a fotografie na obrázku 3 a 4. Tímto rozdělením se očekávalo zlepšení výsledků oproti stavu běžných lehkých dělicích stěn, kdy je konstrukce nerozdělena. Varianta s dvojitým rámem je více ovlivněna přenosem vzduchovou mezerou, resp. výplní panelu. Byly tak provedeny další zkoušky se stejnými výplněmi. Tentokrát vždy pouze jednou pro každou z výplní (plnění panelů bylo totiž náročnější a již dříve bylo prokázáno, že různé rámy vykazují stejné výsledky). Vzniklo tedy dalších 11 měření.





Obrázek 3. Schéma rozděleného rámu

Obrázek 4. Rozdělený rám

Kromě vážené neprůzvučnosti R_w (dB) byly stanoveny též faktory přizpůsobení spektru *C* a C_{tr} (dB), ke kterým bylo také v rámci diskuse výsledků přihlíženo (součtem s hodnotou R_w). Z důvodu omezeného rozsahu příspěvku jsou v tabulce 1 zveřejněny pouze výsledky R_w (dB), dohromady pro nerozdělený i rozdělený panel a bez faktorů přizpůsobení spektru. K výsledkům měření bylo jinak zpracováno více názorných tabulek a grafů, zvlášť pro jednotlivé stavy panelu a i dohromady, a jsou případně k dispozici u autorů.

Číslo výplně	Popis	<i>R</i> _w (dB)		
		Nerozdělený	Rozdělený	Zlepšení
1	dřevovláknité desky STEICO flex, tl. 80 mm	44,0	56,8	12,8
2	minerální vata ISOVER PIANO TWIN, tl. 80 mm	45,0	58,4	13,4
3	minerální vata ISOVER PIANO TWIN, tl. 100 mm	45,6	57,0	11,4
4	konopné vlákno ECO FLEX, tl. 80 mm	44,7	55,2	10,5
5	lněné vlákno NATURIZOL, tl. 80 mm	45,3	55,6	10,3
6	ovčí vlna ISOLENA, tl. 80 mm	44,9	55,4	10,5
7	sláma, tl. 100 mm	44,8	57,3	12,5
8	bavlněná vlákna EN-TEX, tl. 100 mm	46,6	59,2	12,6
9	celulózová vlákna TEMPELAN, tl. 100 mm	47,5	58,8	11,3
10	dřevovláknitá vlákna INSOWOOD, tl. 100 mm	46,8	58,2	11,4
11	kuličky Liaporu, tl. 100 mm	44,6	57,8	13,2

Tabulka 1. Porovnání výsledků 11 výplní pro nerozdělený/rozdělený panel tl. 125 mm

V případě *nerozděleného panelu* se průměrné výsledky vážené neprůzvučnosti R_w pohybují od 44,0 dB do 47,5 dB. Jsou zde tak jisté rozdíly ve výsledcích, které jsou způsobeny jinou výplní v konstrukci lehké dělicí stěny. Obnovitelné výplně typu konopná, lněná vlákna, ovčí vlna a sláma nedosahují oproti běžné výplni s minerální vatou tl. 80 mm (ale i tl. 100 mm) velkého akustického rozdílu. Je tak možné dojít k závěru, že lze úspěšně nahradit energeticky náročnější minerální izolaci těmito materiály a výsledek bude akusticky vždy podobný. To se shoduje i se závěry reference [7]. V rámci frekvenčního průběhu neprůzvučnosti R (dB) bylo navíc vidět zlepšení neprůzvučnosti od 500 Hz.

Velmi zajímavé výsledky vznikají u sypaných materiálů (recyklované) bavlny, celulózy a dřevovlákna. Ty jsou v praxi foukány speciálním přístrojem do konstrukcí, to ovšem nebylo v podmínkách laboratoře možné, byly tak vsypány do rámu tak, aby nedošlo k jejich okamžitému sesednutí. Oproti výplni s minerální izolací tl. 100 mm ($R_w = 45,6$ dB) zde došlo ke zlepšení vzduchové neprůzvučnosti na hodnoty 46,6, 47,5 a 46,8 dB. Důvodem je mimo jiné lepší činitel zvukové pohltivosti α (změřený v Kundtově trubici) a také mírně větší hmotnost samotných výplní. Vůči hmotnosti dřevěného rámu byl však tento nárůst nevýznamný.

Výsledky těchto 3 sypaných izolací opět ukazují, že lze nahradit běžnou minerální izolaci alternativním a ekologičtějším materiálem, tentokrát včetně zlepšení akustických vlastností zvukové izolace (včetně hodnot součtu $R_w + C$, resp. $R_w + C_{tr}$, které nejsou v tomto příspěvku uvedeny).

Jako 11. výplňový materiál byly uvažovány kuličky Liaporu frakce 8/16 mm). Oproti předchozím výsledkům zde sice došlo ke snížení vážené neprůzvučnosti R_w na hodnotu 44,6 dB, ale v průběhu křivky neprůzvučnosti R (dB) se výrazně zlepšila vzduchová neprůzvučnost stěny na nízkých frekvencích 50 až 100 Hz (viz černá křivka v grafu na obrázku 5). Naopak zde ovšem došlo k poklesu na frekvencích 125 až 400 Hz, což je pro sypké materiály v lehké dělicí konstrukci typické.

Všechny relevantní průběhy neprůzvučnosti R (dB) opět není bohužel možné pro nedostatek prostoru v příspěvku uvést. Omezí se tak pouze na ty nejzásadnější materiály, které jsou zajímavé pro další výzkum a jsou uvedeny na obrázku 5. Těmi jsou celulózová vlákna (červená křivka) a kuličky Liaporu. Minerální vlákna (modrá křivka) je zde jako standardní řešení znázorněno k porovnání výsledků. Též je zde uvedeno měření s panelem bez výplně, tj. se vzduchovou mezerou tl. 100 mm (zelená křivka, $R_w = 42,5$ dB). Je z něj patrný přínos přidání izolantu do dutiny, kdy více zvukově pohltivá výplň dutiny snižuje doznívání dutiny, ke kterému dochází, když je dutina prázdná nebo částečně zaplněná [9,10].

V případě *rozděleného panelu* se průměrné výsledky vážené neprůzvučnosti R_w pohybují v rozmezí 55,2 dB až 59,2 dB. Vyplnilo se nejen očekáváné zlepšení vzduchové neprůzvučnosti (které bylo poměrně výrazné – viz šedivé hodnoty ve sloupci "Improvement" v tabulce 1) oproti výsledkům nerozděleného panelu, ale také se mírně projevily větší rozdíly mezi jednotlivými výplněmi.



Obrázek 5. Výplně tl. 100 mm – MV, celulóza, Liapor a vzduch

Trend v jejich vzájemné "kvalitě" však zůstal podobný jako v případě nerozděleného panelu. Nejlepších výsledků opět dosahovaly panely se sypanou izolací (s přihlédnutím k součtovým hodnotám $R_w + C$ a $R_w + C_{tr}$ byla pak ze všech nejlepší varianta s recyklovanými celulózovými vlákny).

K průběhu křivek neprůzvučnosti R (dB) je vhodné poznamenat 2 věci. Došlo k posunutí svislé osy grafů o celých 20 dB nahoru oproti měřením s nerozděleným panelem a v průbězích navíc nyní nedocházelo k takovým poklesům. Naopak se vzrůstající frekvencí vzrůstala zpravidla také neprůzvučnost R (dB). Důvodem je rozdělení dřevěného rámu, přes nějž dříve procházel zvuk, čímž se snižovala zvuková izolace. Problémem pak u všech konstrukcí zůstávají nižší hodnoty na spodních frekvencích, což je pro lehké dělicí konstrukce stěn typické.

Zmíněné je vidět na obrázku 6, na kterém jsou již znázorněny pouze křivky neprůzvučnosti R (dB) pro celulózová vlákna a kuličky Liaporu. Je zde navíc provedeno porovnání obou materiálů jak před rozdělením, tak po rozdělení panelu. Názorně je tak ukázáno, do jaké míry se zlepšila zvuková izolace po rozdělení panelu a že je zde též jasný potenciál k možnému zlepšení vzduchové neprůzvučnosti na

nízkých frekvencích. Další potenciál pro tuto oblast pak autoři spatřují právě ve využití sypkých materiálů.



Obrázek 6. Celulóza, Liapor – ne/rozdělený panel

Pro panel s výplní Liaporu se ovšem stále objevují poklesy vzduchové neprůzvučnosti, a to ve střední a především v horní části zvukoizolační oblasti. Těm musí být v dalším výzkumu věnována pozornost.

5 ZÁVĚR

V rámci měření rozděleného panelu bylo zapotřebí se úspěšně vypořádat s několika montážními problémy. Těmi bylo udržení materiálu slámy, 3 sypaných izolací a kuliček Liaporu v obou polovinách panelu, mezi kterými byla nyní vzduchová mezera. To bylo zajištěno perlinkou. V případě posledního zmíněného materiálu Liaporu bylo také třeba vyřešit výrazné boulení perlinky. Dále se především u tohoto materiálu projevovalo jeho významné sesedání. Docházelo tak k praktickým problémům, kterým je třeba v další navazující části výzkumu věnovat pozornost a vhodným řešením je dopředu eliminovat.

Sypké materiály mohou svou hmotou zlepšit neprůzvučnost konstrukcí běžných lehkých dělicích stěn v oblasti nízkých frekvencí, pro které jsou typické nižší hodnoty. Je tak zajímavé se zaměřit na různé odpadní sypké materiály, vzniklé recyklací z demolice staveb a stavebních materiálů. Takových materiálů je značné množství a mnohé ani dosud nemají žádné následné praktické využití.

V případě použití sypkých materiálů ovšem dochází k typickým poklesům především v oblasti vysokých frekvencí. Tento problém by mohla řešit ve směsi se sypkým materiálem rozptýlená vlákna – například celulózová. Kontrolně bylo v Kundtově trubici provedeno ověření činitele zvukové pohltivosti takové směsi, které tuto teorii potvrzuje. Pracovat se bude přirozeně s různými materiály podobného charakteru.

Další zajímavé akustické chování lze očekávat při případné homogenizaci uvedené směsi pojivem. To by zároveň eliminovalo případné sedání, které je v případě využití sypkých materiálů významným problémem.

Výzkum se tak nezaměří pouze na samotnou akustiku s využitím materiálů, snižujících dopad na životní prostředí, ale chce sledovat i praktickou stránku věci. Pro vhodné kombinace stěnových prvků, podpořené příznivými výsledky výzkumu, budou vyvinuta taková řešení, která podpoří plnou stavební prefabrikaci – tj. stěnové prvky se vyrobí předem, následně se již hotové převezou na stavbu a tam rovnou umístí. Zároveň musí být sledována cena těchto řešení a environmentální kritéria.

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS 25/007/OHK1/1T/11.

REFERENCE

- [1] ČSN EN ISO 10140-1. Akustika Laboratorní měření zvukové izolace stavebních konstrukcí – Část 1: Aplikační pravidla pro určité výrobky. Květen 2022. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2022.
- [2] ČSN EN ISO 10140-5. Akustika Laboratorní měření zvukové izolace stavebních konstrukcí – Část 5: Požadavky na zkušební zařízení a přístrojové vybavení. Říjen 2022. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2022.
- [3] ČSN EN ISO 10140-2. Akustika Laboratorní měření zvukové izolace stavebních konstrukcí – Část 2: Měření vzduchové neprůzvučnosti. Květen 2022.Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2022.
- [4] ČSN EN ISO 10140-4. Akustika Laboratorní měření zvukové izolace stavebních konstrukcí – Část 4: Měřicí postupy a požadavky. Srpen 2022. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2022.
- [5] ČSN ISO 10534-1. Akustika Určování činitele zvukové pohltivosti a akustické impedance v impedančních trubicích – Část 1: Metoda poměru stojaté vlny. Září 2001.Praha: Český normalizační institut, 2001.
- [6] ČSN EN ISO 10534-2. Akustika Určování akustických vlastností v impedančních trubicích – Část 2: Technika dvou mikrofonů pro stanovení činitele zvukové pohltivosti a

povrchové impedance při kolmém dopadu zvuku. Květen 2024. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2024.

- [7] Asdrubali, Francesco. "Survey on the acoustical properties of new sustainable materials for noise control." In *Proceedings of Euronoise*, vol. 30, pp. 1-10. 2006.
- [8] Asdrubali, Francesco, Samuel Schiavoni, and K. V. Horoshenkov. "A review of sustainable materials for acoustic applications." *Building Acoustics* 19, no. 4 (2012): 283-311.
- [9] Hongisto, Valtteri, Mika Lindgren, and Riikka Helenius. "Sound insulation of double walls-An experimental parametric study." *Acta Acustica united with Acustica* 88, no. 6 (2002): 904-923.
- [10] Hongisto, Valtteri, Pekka Saarinen, Reijo Alakoivu, and Jarkko Hakala. "Acoustic properties of commercially available thermal insulators- an experimental study." *Journal of Building Engineering* 54 (2022): 104588.



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

26. - 28. května 2025

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Využití umělých neuronových sítí v prostorové akustice

Aneta Furmanová, Viktor Hruška

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, Technická 2, 166 27 Praha 6

furmaane@fel.cvut.cz

Abstract Physics-Informed Neural Networks (PINNs) have emerged as powerful tools for solving ordinary and partial differential equations by incorporating physical laws directly into the training process. By embedding the governing equations into the loss function, PINNs enable data-efficient learning and improved generalization compared to traditional neural networks. They can be applied to efficiently solve not only forward problems, but also the inverse ones, such as estimating boundary conditions or material properties from measurements. This paper studies this problem on a specific case of inhomogeneous Helmholtz equation, the key equation governing the room acoustics, and provides comparison of chosen training strategies improving the convergence.

1 ÚVOD

V poslední době si umělé neuronové sítě (Artificial Neural Network, ANN) získaly pozornost v oblasti fyziky a akustiky tím, že se dají použít mimo jiné jako aproximátory funkcí. ANN vužívají dostupnost velkého množství dat, ale mohou se potýkat s přeučením, kdy se model příliš přizpůsobí množině trénovacích dat a ztrácí schopnost generalizace. Při setkání s daty, které nebyly použity k tréninku modelu, potom ANN selhává. Tento problém řeší fyzikálně informované neuronové sítě (Physics Informed Neural Network, PINN), které jsou schopny aproximovat řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic [1]. Tato vlastnost se zdá být slibná pro výpočty, které jsou buď náročné na formulaci (např. dynamika tekutin a turbulence), nebo výpočetně náročné kvůli požadované velikosti domény (např. prostorová akustika). Tento článek se zaměřuje na druhou zmíněnou problematiku. Klíčové je, že získaný model skutečně věrně napodobuje samotnou fyziku, nikoliv pouze reprodukuje zdánlivou podobnost s pozorovaným jevem.



Obrázek 1: Schématická reprezentace PINN, která se učí zobrazení $x \to p(x)$, kde x je vstupní souřadnice a p(x) je akustický tlak.

Hlavní myšlenkou, jak zabránit tomu, aby neuronová síť porušovala známé fyzikální zákony, je zakomponovat potřebné diferenciální rovnice do procesu učení zkrze ztrátovou funkci. Tento krok umožňuje trénink s nízkým množstvím dat, což z nich činí výkonný nástroj pro aplikace v oblastech s nedostatkem dat z měření či simulací.

PINN lze použít k řešení přímých i inverzních problémů. Ačkoli je otázkou, zda při řešení přímých problémů mohou překonat konvenční metody, jako je metoda konečných prvků (Finite Element Method, FEM) [2], v řešení inverzních problémů mohou být efektivnější alternativou pro např. odhadování okrajových podmínek nebo vlastností materiálu z měření [3].

Dostupná literatura se zabývá především řešením PDE v jedno- a dvourozměrných prostorech. Studii na možnosti využití PINN pro řešení Helmholtzovy rovnice při rozšíření prostorů z dvou dimenzí do tří se zabývají autoři [5, 6]. Tato práce se zaměřuje na konvergenci takového modelu a analyzuje případné modifikace, které mají konvergenci vylepšit.

2 TEORETICKÝ ROZBOR

V tomto příspěvku uvažujeme 3D doménu $\Omega = [0,1]^3 \text{ m}^3$ reprezentující prostor s ideálně tvrdými stěnami $\partial \Omega = \Gamma$ a se zdrojem zvuku ve středu místnosti. Tento problém je popsán nehomogenní Helmholtzovou rovnicí s homogenní Neumannovou okrajovou podmínkou:

$$(\Delta + k^2)p(\omega, x) = g(\omega, x), \quad x \in \Omega$$
(1)

$$\nabla p(x) \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma , \qquad (2)$$

kde $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ je Laplacián, $k = \omega/c_0$ vlnové číslo, ω the angular frequency and c_0 adiabatická rychlost zvuku, p akustický tlak harmonický v čase a nnormálový vektor.

Zdroj na pravé straně rovnice $g(\omega, x)$ byl zvolen jako

$$g(k, x, y, z) = -2k^2 \cos(kx) \cos(ky) \cos(kz) \exp \frac{||x - x_0||_2^2}{2s^2}$$
(3)

kde s je parametr ovlivňující strmost zdroje, $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5)$ m je lokace zdroje a $||x - x_0||_2$ je euklidovská vzdálenost od zdroje.

Pokud platí $s \to \infty,$ předpis zdroje se zjednodušuje na

$$g(k, x, y, z) = -2k^2 \cos(kx) \cos(ky) \cos(kz)$$
(4)

a dostáváme analytické řešení v následujícím tvaru

$$p(k, x, y, z) = \cos(kx)\cos(ky)\cos(kz) .$$
(5)

Ztrátová funkce je váženým součtem příspěvků z PDE a Neumannovy okrajové podmínky:

$$\mathcal{L} = w_{\rm PDE} \mathcal{L}_{\rm PDE} + w_{\rm NBC} \mathcal{L}_{\rm NBC} , \qquad (6)$$

kde jednotlivé příspěvky jsou definovány jako

$$\mathcal{L}_{\rm PDE} = \frac{1}{N_{\rm PDE}} \sum^{N_{\rm PDE}} ||r_{\rm PDE}(x)||^2 , \qquad (7)$$

$$\mathcal{L}_{\rm NBC} = \frac{1}{N_{\rm NBC}} \sum_{i=1}^{N_{\rm NBC}} ||r_{\rm NBC}(x)||^2 , \qquad (8)$$

a jednotlivá rezidua

$$r_{\rm PDE} = \Delta p(x) + k^2 p(x) - g(x) \quad \forall x \in \Omega , \qquad (9)$$

$$r_{\rm NBC} = \nabla p(x) \cdot n \qquad \forall x \in \Gamma , \qquad (10)$$

kde $N_{\rm PDE}$ je počet trénovacích bodů uvnitř domény a $N_{\rm NBC}$ na okrajích domény.

3 PŘEDBĚŽNÉ VÝSLEDKY

Váhovací koeficienty byly zvoleny jako $w_{\rm PDE} = 1$ a $w_{\rm NBC} = 5$. Trénovaná PINN sestává z 3 skrytých vrstev, každá obsahuje 180 neuronů. Pro trénink bylo použito 25 bodů na vlnovou délku, tj. 50 bodů v každém směru a celkem 125



Obrázek 2: Příklad dosažených výsledků.

000 bodů. Podle [6] byla zvolena aktivační funkce sin a optimalizátor ADAM. Zde je vhodné zmínit, že např. aktivační funkce ReLU, hojně využívaná v ANN, se zde aplikovat nedá, neboť její druhá derivace je nulová a to by znemužnilo učení sítě.

Po zhruba 1500 epochách dosahuje PINN natrénovaná pro analytickém řešení Helmholtzovy rovnice chyby 4-6 %, ukázka řešení a absolutní chyby je vidět na Obrázku 2.

Hlavní překážkou při snaze dosáhnout nižší chyby byly potíže optimalizátoru zkonvergovat, jak ukazuje Obrázek 3. V takovém případě nemusí být ani delší trénink, ani větší trénovací dataset zárukou lepších výsledků: oscilace hodnot ztrátové funkce v rámci řádů poukazují na mnohem fundamentálnější problém.



Obrázek 3: Průběh tréninku PINN. Za pozornost stojí osa y a řád oscilací hodnot ztrátové funkce: amplitudy oscilací by měly být mnohem menší, nejvýše v řádu jednotek.

4 ZTRACENÝ OPTIMALIZÁTOR

Složitá ztrátová funkce činí problém špatně podmíněným, a proto má optimalizátor problémy s konvergencí, což je běžný problém PINN [7]. Pro řešení

tohoto problému byly navrženy různé modifikace, mezi nimi např. lokálně adaptivní aktivační funkce se zotavením sklonu (Locally Adaptive Activation Function with slope recovery) [8] nebo použití dat jako regulátoru [9]. Nutno dodat, že obě tyto strategie ztrátovou funkci dále komplikují. Také je velmi pravděpodobné, že žádná z navrhovaných strategií nebude vylepšením pro libovolnou PDE [7].

Pro analýzu zvolených modifikací není dostatečné pouze porovnávat čas, který model ke konvergenci potřeboval. Více vhledu nám může poskytnout porovnávání konvexity ztrátové funkce, např. skrz analýzu vlastních hodnot jejího Hessiánu [10].

Pomocí kódu poskytnutého [9] můžeme vykreslit krajinu ztrát (Loss Landscape, LL) našeho natrénovaného modelu a porovnat ji s krajinou ztrát neuronové sítě (viz obr. 6), která se liší pouze ztrátovou funkcí, danou jako střední kvadratická chyba mezi vzorem a předpovědí. Ačkoli je povrch krajiny ztrát ANN hladší a globální minimum širší (a tedy ztrátová funkce ANN je lépe podmíněná než pro PINN), celkový rozdíl v krajinách ztrát není nijak zásadní.



Obrázek 4: Krajina ztrát: PINN (nalevo) vs NN (napravo). Představte si optimalizátor využívající gradientní sestup: v této krajině je pro něj téměř nemožné najít minimum.

5 VLIV AKTIVAČNÍ FUNKCE

Jagtap et al. navrhují použití lokálně adaptivní aktivační funkce (Locally Adaptive Activation Function, LAAF), protože adaptivní parametr by měl mít pozitivní vliv na ztrátovou krajinu a zlepšovat konvergenci, a to hlavně v rané fázi trénování [8]. Tato adaptivní funkce je definována jako

$$\sigma(nax) \tag{11}$$

kde σ představuje libovolnou aktivační funkci se vstupem x a predefinovaným škálovacím faktorem $n \geq 1$. Adaptivní parametr $a \in R$ mění strmost aktivační funkce a během tréninku se jeho hodnota mění. Adaptivní parametr může být buď jeden na každou vrstvu neuronové síťě (potom se jedná o tzv. Layer-wise locally adaptive activation functions, L-LAAF) nebo jeden pro každý neuron (Neuron-wise locally adaptive activation functions, N-LAAF).

Pro jednoduchost byla zvolena varianta L-LAAF, což v našem konkrétním případě znamená, že přibývají 3 adaptivní parametry. Škálovací faktor byl nastaven jako n = 2 a všechny adaptivní parametry a inicializovány jako jedna. Z porovnání krajin ztrát při využití aktivační funkce sin(Obr. 3) a při využití L-LAAF se sin (Obr. 5) vyplývá, že tato modifikace má vliv na krajinu ztrát. To, že je v novém případě krajina hladší a minimum je pro optimalizér lépe dostupnější, se projevuje i při tréninku PINN, jak lze vidět na Obr. 5: síť zkonverguje výrazně dříve.

Takto markantní úspěch této drobné modifikace ovšem vede k otázce, zda by se problém nedal vyřešit jednodušeji než přidáním několika adaptivních parametrů. Připomeňme si, proč nepoužíváme ReLU jako aktivaci: jelikož se jedná o kombinaci lineárních funkcí, její nulová druhá derivace by znemožnila neuronové síti učení. K tomu ovšem může dojít za určitých podmínek i u aktivační funkce sin: pokud jsou však vstupy aktivace příliš malé a pohybují se kolem nuly, pohybujeme se v lineárním režimu funkce sin a učení může narazit na stejné problémy jako v případě ReLU.

Hypotéza tedy je, že pokud budeme škálovat argument funkce sin (jako např. $\sin(2x)$, $\sin(4x)$), bude mít tato modifikace podobně pozitivní vliv na konvergenci, jako využití L-LAAF. Pro otestování této hypotézy byla natrénována PINN s aktivační funkcí $\sin(2x)$. Průběh tréninku PINN je vyobrazen na Obr. 5: v tomto konkrétním běhu dokonce trénink zkonvergoval dříve než pro L-LAAF. Krajiny ztrát jsou pro L-LAAF a $\sin(2x)$ srovnatelné. Obě krajiny jsou pro optimalizátor snáze průchodné než krajina pro aktivační funkci sin, jak vyplývá z porovnání Obr. 4 a Obr. 6.

6 ZÁVĚR

Fyzikálně informované neuronové sítě (Physics Informed Neural Network, PINN) sice nabízejí lepší generalizaci než klasické neuronové sítě, jejich nevýhodou je ovšem náročnější trénink kvůli problémům s konvergencí. V dostupné literatuře bylo již navrženo nespočet modifikací za účelem vylepšení konvergence, ovšem žádná z nich nefunguje pro libovolnou parciální diferenciální rovnici a proto je potřeba posoudit vliv případné modifikace na zvolený problém.



Obrázek 5: Průběh tréninku PINN. Zde jsou oscilace hodnot ztrátové funkce přibližně v rámci jednoho řádu a jejich průměr je klesající.



Obrázek 6: Krajina ztrát PINN: L-LAAF (nalevo) vs $\sin(2x)$ (napravo). Obě krajiny jsou pro optimalizátor snáze průchodné než krajiny na Obr. 4.

V této studii jsme se zaměřili na modifikace zvolené aktivační funkce, a to dvěma způsoby. První využívá lokálně adaptivní aktivační funkce L-LAAF a představuje navíc tři adaptivní parametry k tréninku, druhý a jednodušší způsob je prosté škálování argumentu funkce sin. Pro porovnání vlivu těchto úprav byla provedena studie krajiny ztrát.

Z porovnání krajin ztrát vyplývá, že využití L-LAAF se zotavením sklonu není nezbytně nutné, zejména vzhledem k tomu, že představuje další člen do ztrátové funkce, čimž ji dále komplikuje. Výhodou L-LAAF nicméně je, že se škálovací faktor nemusí odhadovat přet tréninkem, ale neuronová síť si ho může měnit během trénování dle potřeby. Oproti tomu, elegance prostého škálování argumentu funkce sin tkví zejména v jednoduchosti implementace, neboť kvůli této modifikaci není potřeba upravovat ztrátovou funkci.

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS25/136/OHK3/3T/13.

REFERENCE

- Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G. E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, J. Comput. Phys., 378, 686–707 (2019). DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
- [2] Grossmann, T. G., Komorowska, U. J., Latz, J., Schönlieb, C.-B.: Can physics-informed neural networks beat the finite element method?, IMA J. Appl. Math., 89(1), 143–174 (2024). DOI: 10.1093/imamat/hxae011.
- [3] Schmid, J. D., Bauerschmidt, P., Gurbuz, C., Eser, M., Marburg, S.: Physics-informed neural networks for acoustic boundary admittance estimation, Mech. Syst. Signal Process., 215, 111405 (2024). DOI: 10.1016/j.ymssp.2024.111405.
- [4] Lu, L., Meng, X., Mao, Z., Karniadakis, G. E.: DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations, SIAM Rev., 63(1), 208–228 (2021). DOI: 10.1137/19m1274067.
- [5] Schoder, S., Kraxberger, F.: Feasibility study on solving the Helmholtz equation in 3D with PINNs, arXiv preprint arXiv:2403.06623 (2024).
- [6] Schoder, S.: Physics-informed neural networks for modal wave field predictions in 3D room acoustics, Appl. Sci., 15(2), 939 (2025). DOI: 10.3390/app15020939.
- [7] Rathore, P., Lei, W., Frangella, Z., Lu, L., Udell, M.: Challenges in training PINNs: A loss landscape perspective, Proc. 41st Int. Conf. Mach. Learn. (ICML'24), Vol. 235, Article 1715, 42159–42191 (2024).
- [8] Jagtap, A. D., Kawaguchi, K., Karniadakis, G. E.: Adaptive activation functions accelerate convergence in deep and physics-informed neural networks, J. Comput. Phys., 404, 109136 (2020). DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109136.
- [9] Gopakumar, V., Pamela, S., Samaddae, D.: Loss landscape engineering via data regulation on PINNs, Mach. Learn. Appl., 12, 100464 (2023). DOI: 10.1016/j.mlwa.2023.100464.
- [10] Li, H., Xu, Z., Taylor, G., Studer, Ch., Goldstein, T.: Visualizing the loss landscape of neural nets, Proc. 32nd Int. Conf. Neural Inf. Process. Syst. (NeurIPS'18) (2018).



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

26. - 28. května 2025

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Redukce nelineárního zkreslení kondenzátorových mikrofonů

Petr Honzík

ČVUT FEL, Technická 2, 16627 Praha 6

honzikp@fel.cvut.cz

Abstract

This paper addresses the problem of nonlinear distortion in condenser microphones, which primarily originates from their inherently nonlinear capacitance. A theoretical analysis is provided based on recent literature, followed by the development of a simplified model that enables the prediction and reduction of such distortions. The main advantage of the proposed method is that it requires only one parameter, which can be estimated from measurements. Experimental results show that the second harmonic component in the nonlinear output of the microphone can be significantly reduced using the optimal value of this parameter. The proposed method was effectively applied to the output of a microphone used in a probe for the measurement of otoacoustic emissions, and the results are discussed.

1 ÚVOD

Kondenzátorové mikrofony jsou široce užívány pro měřící aplikace, ve studiovém nahrávání i živém zvučení a v poslední době zejména jako miniaturní (MEMS) mikrofony ve spotřební elektronice. Klasické uspořádání mikrofonu jako kondenzátoru s jednou pohyblivou elektrodou (napnutá membrána) a jednou pevnou elektrodou, tzv. "single back-plate", přináší výhody jako například dlouhodobě zvládnutá technologie výroby, velmi rovná frenvenční charakteristika až do frekvence první mechanické rezonance membrány, nízký vlastní šum a v neposlední řadě nízké nelineární zkreslení. Toto zkreslení nicméně zanáší chybu do výstupního signálu mikrofonu v podobě nechtěných harmonických a intermodulačních produktů [1, 2] a může být způsobeno například nelineárními akustickými ději v mezeře mezi mebránou a pevnou elektrodou, proměnným tlumením v této mezeře, mechanickými vlastnostmi membrány [3] a v neposlední řadě nelineární změnou kapacity kondenzátoru při pohybu membrány.

2 TEORIE NELINEÁRNÍHO ZKRESLENÍ V KONDENZÁTOROVÉM MI-KROFONU

Ukazuje se [4], že dominantním zdrojem nelinearit v kondenzátorových mikrofonech je nelineární kapacita mikrofonu. Níže je popsán teoretický rozbor této nelinearity podle [4, 5, 6].

Náboj Q v kondenzátoru je dán součinem elektrického napětí U a kapacity C, tedy Q = CU. Statická kapacita kondenzátorového mikrofonu (bez pohybu membrány), $C = C_0 + C_p$, se skládá z parazitní kapacity C_p a aktivní statické kapacity mikrofonu $C_0 = \varepsilon_0 S_0/h_g$, kde ε_0 je permitivita vakua, S_0 je aktivní plocha daná překryvem membrány a pevné elektrody (obecně tyto dvě elektrody nemusí mít stejné rozměry a často je nemají) a h_g je klidová vzdálenost membrány a pevné elektrody (tzv. tloušťka "gapu"). Totální diferenciál náboje lze pak vyjádřit jako

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}CU + C\mathrm{d}U.\tag{1}$$

Dále budeme předpokládat, že celkové napětí se skládá z konstantního polarizačního napětí U_0 přivedeného z externího zdroje přes polarizační odpor R a malého střídavého napětí u, které je superponováno na U_0 díky změně kapacity mikrofonu dC způsobené výchylkou membrány, tedy $U = U_0 + u$. Zároveň předpokládáme $U_0 \gg u$ a v rovnici (1) můžeme nahradit $U \approx U_0$ a d $U \approx u$. Vzhledem k velkému polarizačnímu odporu (řádu G Ω) bude po počátečním nabití kondenzátoru proud zanedbatelný, a tedy d $Q \approx 0$. Promítneme-li výše popsané aproximace do rovnice (1), můžeme vyjádřit výstupní napětí kondenzátorového mikrofonu

$$u = -U_0 \frac{\mathrm{d}C}{C}.\tag{2}$$

Chceme-li vyjádřit časovou závislost změny kapacity mikrofonu, zavedeme nejprve průměrnou výchylku membrány přes aktivní plochu S_0 , která závisí pouze na čase, nikoliv na prostorových souřadnicích, $\bar{\xi}(t) = \left(\iint_{S_0} \xi(\vec{r}, t) dS_0 \right) / S_0$, kde $\xi(\vec{r}, t)$ je výchylka membrány pozitivně orientovaná ve směru ven z domény (od pevné elektrody), kladný příchozí akustický tlak tedy způsobí zápornou výchylku. Celková kapacita mikrofonu v závislosti na čase je pak dána

$$C_t(t) = C_p + \frac{\varepsilon_0 S_0}{h_g + \bar{\xi}(t)} = C_p + C_0 \frac{1}{1 + \bar{\xi}(t)/h_g}.$$
(3)

Předpokládáme-li, že celkovou kapacitu (3) lze vyjádřit jako součet $C_t(t) = C_p + C_0 + dC(t)$, pak při použití Taylorova rozvoje $1/(1+y) = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots$ můžeme časovou závislost změny kapacity zapsat jako

$$dC(t) = -C_0 \left[\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} - \left(\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} \right)^3 - \cdots \right].$$
(4)

Dosazením (4) do (2) vznikne vztah pro výstupní napětí kondenzátorového mikrofonu

$$u(t) = U_0 \frac{C_0}{C_p + C_0} \left[\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} - \left(\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g} \right)^3 - \cdots \right], \tag{5}$$

kde je zjevný nelineární vztah mezi výstupním napětím a poměrem průměrné výchylky k tloušťce vzduchové mezery $\frac{\bar{\xi}(t)}{h_g}$. Pro zjednodušení zápisu bývá tento poměr označen jako y(t) a je zavedena konstanta K_0 daná vztahem

$$K_0 = U_0 \frac{C_0}{C_p + C_0}.$$
 (6)

Výstupní napětí mikrofonu pak lze zapsat jako

$$u(t) = K_0 \left[y(t) - y^2(t) + y^3(t) - \dots \right].$$
(7)

3 MĚŘENÍ NELINEÁRNÍHO ZKRESLENÍ V KONDENZÁTOROVÉM MI-KROFONU

Měření nelineárního zkreslení v kondenzátorovém mikrofonu je detailně popsáno v [4], měření na více mikrofonech (nikoliv jen kondenzátorových) je publikováno v [7]. Základním problémem měření nelinearit mikrofonů je absence lineárního zdroje. Jelikož prakticky všechny reproduktory produkují vyšší harmonické složky při harmonickém buzení, zejména v případě měření na vyšších úrovních SPL (Sound Pressure Level), kde se obvykle začínají projevovat nelinearity mikrofonů, není možné na výstupu mikrofonu oddělit nelineární produkty způsobené měřeným mikrofonem od harmonických a intermodulačních produktů způsobených průchodem již zkresleného signálu z reproduktoru nelineárním mikrofonem. Z tohoto důvodu byla u výše citovaných měření použita metoda "předzkreslení" [8], která iterativně přidává do signálu budícího reproduktor vyšší harmonické složky s příslušnou fází tak, aby se na výstupu reproduktoru tyto složky vykompenzovaly s nelineárními produkty způsobenými reproduktorem. Výstup reproduktoru je zároveň kontrolován pomocí referenčního měřícího mikrofonu u nějž se předpokládá zanedbatelné nelineární zkreslení. Tímto způsobem lze obecně dosáhnout žádaného spektrálního složení periodického signálu na výstupu reproduktoru (kromě signálu typu sinus/cosinus i například trojúhelníkového či obdélníkového signálu, případně signálů typu "two-tone" a "multi-tone"), nežádoucí harmonické složky jsou potlačeny na úrověň šumu.

Jako příklad je na obrázku 1 uvedeno měření nelineárního zkreslení mikrofonu v sondě pro měření otoakustických emisí Etymotic ER10C na frekvenci

budícího signálu 510 Hz. V závislosti na hladině budicího akustického tlaku změřené referenčním mikrofonem jsou vyneseny hodnoty prvních tří harmonických komponent (viz popis) na výstupu měřeného mikrofonu přepočítané na hladinu akustického tlaku přes změřenou citlivost mikrofonu (kulaté body). Pro porovnání jsou vyneseny i hodnoty spočtené pomocí teoretického modelu popsaného v předchozí sekci (čárkované linky). První harmonická vykazuje shodu mezi modelem a naměřenými hodnotami díky použití změřené hodnoty citlivosti mikrofonu. Dále je v modelu použita odhadnutá hodnota $K_0 = 40 V$. Druhá harmonická při této hodnotě K_0 vykazuje soulad mezi naměřenými a teoretickými hodnotami. V případě třetí harmonické jsou však změřené hodnoty o více jak 20 dB nad teoretickými hodnotami, což je způsobeno vlivem nelinearit, které nejsou zahrnuty v modelu. Tento výsledek je v souladu s výše citovanými publikacemi [4, 7, 6].



Obrázek 1: Hladina akustického tlaku změřená měřeným mikrofonem (kulaté body) a spočtená modelem podle rovnice (7) (čárkované linky) na frekvenci 510 Hz v závislosti na vstupní hladině tlaku: 1. harmonická (modrá), 2. harmonická (oranžová) a 3. harmonická (zelená).

4 REDUKCE NELINEÁRNÍHO ZKRESLENÍ KONDENZÁTOROVÝCH MI-KROFONŮ

Z prezentovaných výsledků měření i z literatury, např. [9], je patrné, že dominantní složkou vzniklou na základě nelineární kapacity mikrofonu je 2. harmonická. Její redukce vede k výraznému snížení celkového nelineárního zkreslení mikrofonu (parametr THD).

Metoda redukce nelineárního zkreslení pomocí snížení 2. harmonické byla publikována nedávno [6]. Vychází z rovnice (7) kde jsou zanedbány všechny komponenty vyššího než 2. řádu

$$u(t) \approx K_0[y(t) - y^2(t)].$$
 (8)

Následně je zaveden model výstupního napětí ideálního lineárního mikrofonu $u_{lin}(t) = K_0 y(t)$. Ten je dosazen do rovnice (8) a je nalezena inverzní funkce tak, aby bylo získáno $u_{lin}(t)$. Jelikož takto získaná inverzní funkce není v praktických případech vždy vhodná k implementaci (obsahuje odmocninu), je následně zjednodušena pomocí Taylorova rozvoje a výsledný vztah je potom

$$u_{lin}(t) \approx u(t) + \frac{1}{K_0} u^2(t) \tag{9}$$

Pro ilustraci účinnosti metody lze aplikovat rovnici (9) na data naměřená na mikrofonu v sondě pro měření otoakustických emisí z obrázku 1. Na obrázku 2 je zobrazeno spektrum signálu na výstupu z mikrofonu přepočítané pomocí jeho změřené citlivosti na hladinu akustického tlaku při buzení mikrofonu akustickým tlakem o hladině 108 dB SPL na frekvenci 510 Hz, a to bez redukce zkreslení (modrá linka) a po aplikaci redukce zkreslení pomocí rovnice (9) (oranžová linka - pro názornost posunutá o 20 Hz doleva). Je zřejmé, že druhá harmonická na frekvenci 1020 Hz byla potlačena o více, než 40 dB. Je třeba dodat, že toto je optimální případ, na vyšších úrovních se začnou více projevovat jiné zdroje nelinearit než je nelineární kapacita a na nižších úrovních se hladina 2. harmonické snižuje a přibližuje se šumu měření, obojí vede k menší redukci úrovně 2. harmonické. Zároveň byly během měření na sondě pro otoakustické emise pozorovány fázové posuny závislé na frekvenci, které rovněž snižují účinnost metody a číní jí frekvenčně závislou, ačkoliv by teoreticky pro danou optimální hodnotu parametru K_0 měla metoda fungovat nezávisle na frekvenci. Tento jev bude podroben dalšímu zkoumání.

5 ZÁVĚR

Metoda redukce nelineárního zkreslení pomocí snížení úrovně 2. harmonické popsaná v literatuře [6] byla aplikována na mikrofon v sondě pro měření otoakustických emisí. Uvedené příklady výsledků dokládají, že metodu lze na tento mikrofon s úspěchem aplikovat, v optimálním případě byla 2. harmonická snížena o více než 40 dB. Budoucí práce je třeba zaměřit na účinnost metody v případě kdy dojde v signálu na výstupu mikrofonu k fázovým posuvům, například vlivem dalšího analogového zpracování.



Obrázek 2: Spektrum signálu na výstupu mikrofonu při buzení harmonickým signálem o hladině 108 dB SPL na frekvenci 510 Hz bez redukce zkreslení (modrá linka) a s redukcí zkreslení (oranžová linka).

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena projektem 23-07621J Grantové agentury České republiky (GAČR) "Otoakustické emise v normální kochlee a při přetlaku v endolymfatickém prostoru kochley: modelování a experimenty".

REFERENCE

- H. Pastillé, "Electrically manifested distortions of condenser microphones in audio frequency circuits," J. Audio Eng. Soc., vol. 48, no. 6, pp. 559–563, 2000.
- [2] M. T. Abuelma'atti, "Improved analysis of the electrically manifested distortions of condenser microphones," Appl. Acoust., vol. 64, no. 5, pp. 471–480, 2003.
- [3] S. Chowdhury, M. Ahmadi, and W. C. Miller, "Nonlinear effects in MEMS capacitive microphone design," in Proc. - Int. Conf. MEMS, NANO Smart Syst. ICMENS 2003, pp. 297–302, 2003.
- [4] A. Novak and P. Honzík, "Measurement of nonlinear distortion of mems microphones," *Applied Acoustics*, vol. 175, p. 107802, 2021.
- [5] B. L. L. M. V. T., Acoustics: Sound Fields and Transducers. 2012.
- [6] P. Honzík and A. Novak, "Reduction of nonlinear distortion in condenser microphones using a simple post-processing technique," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 157, pp. 699–705, February 2025.
- [7] A. Novak and P. Honzík, "Measurement of microphone harmonic distortion using predistortion technique," in *Proc. Forum Acusticum*, (Turin, Italy), EAA, 2023.
- [8] A. Novak, L. Simon, and P. Lotton, "A simple predistortion technique for suppression of nonlinear effects in periodic signals generated by nonlinear transducers," J. Sound Vib., vol. 420, pp. 104–113, 2018.
- [9] S. V. Djuric, "Distortion in microphones," in ICASSP'76. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process., vol. 1, pp. 537–539, IEEE, 1976.



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Objevování nelineárních vlnových rovnic z dat

Viktor Hruška, Aneta Furmanová, Tereza Filipská

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, Technická 2, 166 27 Praha 6

viktor.hruska@fel.cvut.cz

Abstract This short contribution explores the possibilities of discovering nonlinear wave equations using machine learning algorithms. The basic technical problems that this subfield of acoustics entails (e.g., the occurrence of steep gradients, which complicates the numerical evaluation of partial derivatives) and the possibilities for solving them (e.g., converting the whole problem into a weak formulation of partial differential equations) are described. A particular example shows the algorithmic discovery of the Westervelt equation from data taken directly from the Navier-Stokes equations.

1 ÚVOD

V posledních několika letech se pozornosti základního i aplikovaného výzkumu těší oblast fyzikálně podloženého strojového učení (*physics-informed machine learning*). Pod tento široký pojem patří celé početné rodiny postupů a algoritmů z nepříliš ostře vymezené oblasti strojového učení, do kterých jsou přidány fyzikální informace jako jistý typ vnitřní vazby nebo regularizace (viz např. [1]). Obecně se odhaduje, že takto pojímané algoritmy mají výrazně větší šanci na extrapolaci mimo oblast svých tréninkových dat, než by bez využití fyzikálních znalostí bylo dosažitelné. Jinými slovy, že je možné se takto blížit opravdových fundamentům, nikoli pouze zajistit funkčnost jednoúčelového modelu (častý problém zejména při trénování umělých neuronových sítí).

Tento příspěvek je zaměřen na jedno konkrétní využití postupů fyzikálně podloženého strojového učení, totiž na objevování rovnic z dat. V podstatě se jedná o velmi specifický případ regrese, při které se data neprokládají funkcí, ale hledá se diferenciální operátor, který by jim vyhovoval.

Velmi schématicky vzato se oblasti zájmu mohou týkat buď problémů, ve kterých není jasné, jak k přímé aplikaci fyzikálních zákonů zachování přikročit nebo také případů, kde dochází ke kombinaci mnoha vlivů, u kterých není jasná přesná povaha jejich spřažení. Řešením problému je nalezení efektivní parciální diferenciální rovnice, která odpovídá časoprostorovému vývoji fenoménů obsažených v tréninkových datech. V následujících odstavcích se jedná o první z výše zmíněných variant: jak data získaná pomocí velmi obecných zákonů zachování "strojově" upravit tak, aby z nich vyplývaly rovnice popisující silná zvuková pole?

Před samotným popisem algoritmu objevování vlnových rovnic z dat se krátce zastavíme u nutného minima informací z oblasti základů nelineární akustiky (též akustiky konečných amplitud – oddíl 2). Konkrétní představení algoritmu (oddíl 3) a specifická ukázka fungování (oddíl 4) se opírají o příspěvek autorského kolektivu na letošní konferenci Forum Acusticum Euronoise 2025.

2 KRÁTCE O AKUSTICE KONEČNÝCH AMPLITUD

Poznamenejme předem, že následující řádky obsahují pouze stručné zmínky o principech a pojmech vztahujících se k nelineární akustice, které jsou využívány dále v textu. Klasická fyzikální formulace lineární akustiky – tak, jak se používá například pro prostorovou akustiku nebo běžné výpočty hlukové zátěže – je specifická limita pohybových rovnic stlačitelných, viskózních a tepelně vodivých tekutin (Navierových–Stokesových rovnic), které jsou pro tyto tekutiny ekvivalentem zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie. Oproti plnému tvaru rovnic představuje limita lineární akustiky citelné zjednodušení. To se opírá zejména o předpoklad, že akustické poruchy tvoří "jen velmi nepatrné zčeření" na klidových hodnotách hustoty a tlaku v prostředí. V pojmech aplikované matematiky je toto ekvivalentní výroku, že v Taylorově rozvoji tlaku jako funkce hustoty připouštíme pouze poruchy prvního řádu.

V případě silných zvukových polí je ovšem nutné rozšířit tento rozvoj ještě o další člen. Šíření zvukových vln následně není popsáno pouze lineární (d'Alembertovou) vlnovou rovnicí,¹ ale některou z rovnic obsahující kvadratické nelinearity v akustickém tlaku (nebo jiné popisné veličině). To otevírá širokou rodinu fenoménů, které v oblasti lineární akustiky nemají svůj protějšek. Z nich asi nejznámější je postupné zvyšování sklonu vlny (*wave steepening*) vedoucí v některých případech až k utvoření rázové vlny (*shock formation* – viz Obr. 1).

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

¹Důležitá poznámka: V následujícím textu uvažujeme bezrozměrné tvary rovnic. Pro ilustraci, rozměrový čas t' nahrazujeme bezrozměrným $t = c_0 t'/\ell$, kde ℓ je charakteristický rozměr oblasti a c_0 adiabatická rychlost šíření zvuku. Analogicky pro další veličiny. Lineární vlnová rovnice má tedy pouze tvar:



Obrázek 1: Ilustrace šíření tlakových pulzů konečné amplitudy. Vlna zde postupuje zleva doprava. U pulzu s vyšší amplitudou je patrné, že jeho strana ve směru šíření je strmější než obrácená. Tento jev je následkem skládání rychlosti šíření vlny s lokální akustickou rychlostí.

Ačkoli v reálných prostředích nedojde k vytvoření skutečné diskontinuity v matematickém smyslu slova, derivace lokálně mohou dosahovat značně vysokých hodnot.

Pokud objevování nelineárních vlnových rovnic z dat nemá být cosi jako tautologie, nemohou být tréninková data získána přímo z vlnových rovnic s kvadratickými nelinearitami. Místo toho využíváme simulace přímo na základě jednoho z tvarů Navierových-Stokesových rovnic pro ideální plyn (blíže viz práci Červenky a Bednaříka [2]).

Zmíněným rovnicím je potřeba přizpůsobit i techniky jejich numerického řešení, kvůli možnému výskytu strmých gradientů v okolí rázových vln. V této práci používáme vlastní implementaci algoritmu Kurganov–Tadmor [3]. Tréninková data tvoří simulace šíření tlakových pulzů, které mají na počátku gaussovský průběh (o obecně různých amplitudách a šířkách – viz níže).

3 ALGORITMUS OBJEVOVÁNÍ NELINEÁRNÍCH VLNOVÝCH ROVNIC

Řada algoritmů objevování rovnic se opírá o vytvoření široké knihovny členů, které by v rovnicích mohly vystupovat [1]. Z množiny tréninkových dat jsou pak vybrána místa v prostoru a čase, ve kterých jsou určeny konkrétní hodnoty kandidátních členů. Analyzováním souhry nebo neladu takto získaných údajů se určuje, zda ten či onen kandidátní člen v rovnici má nebo nemá vystupovat (techničtější popis viz níže). Odtud ovšem plyne, že v klasické (silné) formulaci parciálních diferenciálních rovnic je potřeba počítat z tréninkových dat parciální derivace numerickými aproximacemi. Jelikož vstupní data často nejsou dostatečně hladká, vede tento přístup k výraznému zesílení šumu. Bylo by sice možné šum filtrovat, to však v případě nelineární akustiky naráží na problém: zde není výskyt lokálních strmých gradientů pouze artefaktem nevhodného zpracování dat, ale i fyzikálním jevem samotným [4, 5].

Jednoduché a elegantní řešení nabízí algoritmus weak-PDE-LEARN od Stephanyho a Earlse [6], jehož variantu a přizpůsobení našemu oboru představujeme v tomto článku. Hlavní myšlenkou je převést problém hledání vlnových rovnic ze silné formulace na slabou. Zjednodušeně řečeno: místo snahy zajistit správné sladění diferenciálních členů v nekonečně malých okolích vybraných bodů prostoročasu se zaměřujeme na ověření "správné shody" integrálů kandidátních členů násobených testovacími funkcemi. V následujících odstavcích si tento koncept projdeme.

Nechť Ω označuje oblast $\Omega\equiv[0,X]\times[0,T]$ (tzn. jedna prostorová dimenze $x\in[0,X]$ a čas $t\in[0,T]$). Používáme multi-indexovou notaci parciálních derivací:

$$\mathbf{D}^{\alpha(m,n)}p \equiv \frac{\partial p^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \,. \tag{2}$$

Například d'Alembertův operátor lze zapsat jako

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \equiv \mathbf{D}^{(0,2)} p - \mathbf{D}^{(2,0)} p \,. \tag{3}$$

Pokud předpokládáme, že se pohybujeme v limitě slabě nelineární akustiky, dává smysl hledat rovnice ve formě, která představuje pouze korekci lineární vlnové rovnice. Hledaný vztah má tedy tvar:

$$D^{(0,2)}p - D^{(2,0)}p = \sum_{i} c_{i} D^{\alpha_{i}} p^{s_{i}} , \qquad (4)$$

kde c_i je konstanta, α_i a s_i označují multi-index a mocninu *i*-tého kandidátního členu. Pro účely tohoto článku dovolujeme, aby *s* nabývalo pouze hodnot 1 a 2 (tedy členy lineární nebo kvadratické v *p*).

Nyní obě strany rovnice (4) vynásobíme testovací funkcí $w_k = w_k(x,t)$ a integrujeme přes celou oblast prostoročasu Ω :

$$\int_{\Omega} w_k \left(\mathbf{D}^{(0,2)} p - \mathbf{D}^{(2,0)} p \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \sum_i c_i \int_{\Omega} w_k \mathbf{D}^{\alpha_i} p^{s_i} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,. \tag{5}$$

Obecně by rovnice (5) měla platit pro libovolnou testovací funkci $w_k(x,t) \in \mathcal{C}_c^{\infty}$. Omezíme se pouze na rodinu funkcí $w_k(x,t)$ zadaných následujícím



Obrázek 2: Ilustrace dílčích úkonů v algoritmu pro objevování vlnových rovnic ve slabé formě. Zobrazen je akustický tlak rozlišený v prostoru (vertikální osa) a čase (horizontální osa). Vlevo: šířící se tlakový puls p(x,t) s černou tečkou označující střed váhové funkce. Uprostřed: třetí časová derivace váhové funkce $D^{(0,3)}w_k(x,t)$. Vpravo: příklad integrandu na pravé straně rovnice (7): $p(x,t)D^{(0,3)}w_k(x,t)$.

způsobem. Pokud bod (x,t) leží uvnitř koule poloměru r se středem v (x_0,t_0) , pak

$$w_k(x,t) = \exp\left[\frac{\beta r^2}{(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 - r^2} + \beta\right]$$
(6)

V ostatních případech $w_k(x,t) = 0$. Konkrétní tvar testovací funkce určuje volba β , r, x_0 a t_0 . Pokud omezíme polohu center funkcí (x_0, t_0) tak, aby ležela dostatečně daleko od hranice $\partial\Omega$, můžeme využít toho, že $w_k = 0$ na $\partial\Omega$, a tím pádem s použitím Greenových vět psát:

$$\int_{\Omega} w_k \mathcal{D}^{\alpha_i} p^{s_i} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = (-1)^{|\alpha_i|} \int_{\Omega} p^{s_i} \mathcal{D}^{\alpha_i} w_k \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t;, \tag{7}$$

kde $|\alpha_i(m,n)| = m + n$. Viz obr. 2 pro schematické znázornění.

Tento krok je zásadní, protože umožňuje převést derivování z dat p(x,t) na analyticky diferencovatelnou testovací funkci w_k . Stejný postup lze samozřejmě použít i na levou stranu rovnice (5). Na tomto místě, tak příhodně utopeném, by autorský kolektiv rád vyslovil své uznání čtenáři, který se popásá na této větě a stále u toho vnímá. Opakováním výše popsaného postupu pro každou testovací funkci a každý kandidátní člen dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro koeficienty c_i :

$$A_{ki}c_i = b_k av{8}$$

kde

$$A_{ki} = (-1)^{|\alpha_i|} \int_{\Omega} p^{s_i} \mathcal{D}^{\alpha_i} w_k \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,, \tag{9}$$

$$b_k = \int_{\Omega} p\left(\mathbf{D}^{(0,2)} w_k - \mathbf{D}^{(2,0)} w_k \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,. \tag{10}$$

Tuto soustavu můžeme řešit různými metodami numerické lineární algebry. Je ovšem důležité si uvědomit, že klasické řešení ve smyslu nejmenších čtverců bude velmi pravděpodobně obsahovat směs v podstatě všech kandidátních členů a vzhledem k pravděpodobnému výskytu kovariance mezi sloupci matice A_{ki} nebude příliš numericky stabilní. Východisko představuje úvaha kopírující princip Occamovy břitvy: je potřeba omezit počet členů pouze na ty skutečně nutné. Za tímto účelem byl použit algoritmus LASSO (*least absolute shrinkage and selection operator*), který k metodě nejmenších čtverců přidává ještě penalizaci za velikost koeficientů. Řešení rovnice (8) je tak převedeno na optimalizační problém:

$$\mathbf{c} = \arg\min_{\mathbf{c}'} \left\{ ||\mathbf{A}\mathbf{c}' - \mathbf{b}||_2 + \lambda ||\mathbf{c}'||_1 \right\}$$
(11)

kde **c** a **b** značí vektory koeficientů c_i a b_k a $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ označují L_1 a L_2 normy. Detaily uplatnění, včetně volby hyperparametru λ v našem případě sledovaly zavedený postup algoritmu Least-squares-post-Lasso (viz např. [7]).

Tímto způsobem máme tedy dobrou šanci získat pouze fyzikálně významné členy nelineární vlnové rovnice.

4 VÝSLEDKY PRO POSTUPNÉ VLNY

V tomto příspěvku ukážeme pouze jednu aplikaci výše uvedeného postupu, a to objevování rovnice pro slabě nelineární postupující vlny. Z tréninkových dat vybíráme pouze prostoročasovou oblast, ve které se pulzy šíří bez vzájemného ovlivňování a bez kontaktu s okrajovými podmínkami jakéhokoliv druhu.

Pro srovnání objevené vlnové rovnice se známými analytickými modely jsme použili výsledky 41 simulací pro různé amplitudy a šířky pulzů. Tím pádem jsme schopni poskytnout také základní statistiku rozptylu výsledků. Jako kandidátní členy byly uvažovány:

$$D^{(1,0)}p$$
, $D^{(0,1)}p$, $D^{(0,3)}p$, (12)

$$D^{(1,1)}p$$
, $D^{(2,0)}p^2$, $D^{(0,2)}p^2$. (13)

Jelikož se jedná o korekce k d'Alembertově vlnové rovnici, lze jednotlivé členy také fyzikálně interpretovat: V prvním řádku se jedná o různé mechanismy útlumu (liché derivace s reálnými koeficienty) a ve druhém řádku o konvekci a nelinearitu.

V každé simulaci bylo použito 100 testovacích funkcí, což činilo soustavu výrazně přeurčenou. Centra testovacích funkcí byla volena náhodně s podmínkou, že tlak v bodě (x_0, t_0) nesmí být menší než polovina maximálního tlaku v datasetu (jinak by některé řádky matice A_{ki} mohly být triviální).

Výsledná vlnová rovnice má následující tvar (pro přehlednost v klasické notaci parciálních derivací):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = (1.193 \pm 0.011) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + (0.001 \pm 0.000) \frac{\partial^2 p^2}{\partial x \partial t} + (0.004 \pm 0.002) \frac{\partial^2 p^3}{\partial t^3} .$$
(14)

První člen na pravé straně představuje nelinearitu odpovídající Westerveltově rovnici [4, 5]. Hodnota jeho koeficientu je v rámci intervalu spolehlivosti stejná jako učebnicová hodnota $(\gamma+1)/2$. Za povšimnutí stojí, že relativní šířka intervalu spolehlivosti je velmi malá, takže se jedná o poměrně přesný výsledek.

Druhý člen na pravé straně je velmi malý a jeho hodnota se mezi jednotlivými výsledky prakticky neměnila, což naznačuje, že se jedná o drobnou systematickou chybu. Prakticky jde o korekci jednotkové rychlosti šíření vlny. Pravděpodobně se jedná o artefakt při přepočtu dat.

Třetí člen na pravé straně reprezentuje ztráty. Ze všech možností diferenciálního řádu algoritmus skutečně správně vybral ten, který by odpovídal termoviskóznímu útlumu v objemu kapaliny. Nicméně, koeficient je příliš velký pro ideální plyn a jeho interval spolehlivosti je rovněž poměrně široký. Velmi pravděpodobně algoritmus správně nalezl koeficient odpovídající numerické viskozitě použitého solveru [3]. To by vysvětlovalo jak hodnotu koeficientu, tak i jeho rozptyl, protože numerická viskozita je v tomto případě úměrná čtvrté prostorové derivaci a tedy značně závisí na počátečních podmínkách konkrétní simulace.

Lze očekávat, že tento problém by se neobjevil, pokud by se vlny šířily prostředím s většími skutečnými ztrátami. V takovém případě by numerická viskozita solveru byla ve srovnání se ztrátami média zanedbatelná. Na druhou stranu bychom však přišli o výhodu, že rovnice, ze kterých čerpáme tréninková data, jsou blízké fundamentálním vyjádřením zákonům zachování, protože parametry ztrát a nelinearity jsou v reálných kapalinách často pouze empirické [4, 5].

5 ZÁVĚR A BUDOUCÍ SMĚŘOVÁNÍ

Účelem tohoto krátkého příspěvku bylo upozornit na možnosti algoritmů zjišťujících tvary parciálních diferenciálních rovnic z dat pro potřeby nelineární akustiky. Konkrétně jsme se zabývali výhodami slabé formulace, která umožňuje obejít obtížné a nespolehlivé numerické výpočty derivací z dat obsahujících rázové vlny. Specifická ukázka spočívala v ověření, zda algoritmus skutečně správně nalezne Westerveltovu rovnici, která v limitě slabě nelineární akustiky popisuje obousměrně se šířící vlny.

Smysl podobných snah na dobře zmapovaných případech je v ověření, že algoritmy jsou dobře a spolehlivě nastaveny. V budoucnu bude možné se zaměřit na problémy se slabším teoretickým fundamentem, jako je šíření vln v komplikovaných prostředích (např. ultrazvuk v lidských tkáních) nebo nacházení originálních řešení pro případy, kde doposud nebyla analyticky známá. Část světové literatury se například věnuje objevování nových linearizujících transformací (v oblasti nelineární akustiky je známá např. Coleova–Hopfova transformace linearizující Burgersovu rovnici).

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS25/136/OHK3/3T/13.

REFERENCE

- J. Nathan Kutz and Steven L. Brunton. Parsimony as the ultimate regularizer for physics-informed machine learning. *Nonlinear Dynamics*, 107(3):1801–1817, January 2022. ISSN 1573-269X. 10.1007/s11071-021-07118-3.
- [2] M. Červenka and M. Bednařík. Description of finite-amplitude standing acoustic waves using convection-diffusion equations. *Czechoslovak Journal of Physics*, 55(6):673–680, June 2005. ISSN 1572-9486. 10.1007/s10582-005-0071-5.
- [3] Alexander Kurganov and Eitan Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160(1):241–282, May 2000. ISSN 0021-9991. 10.1006/jcph.2000.6459.
- [4] David T. Blackstock. Fundamentals of physical acoustics. Wiley, 2000. ISBN 978-0-471-31979-5.
- [5] K Naugolnykh and L Ostrovsky. Nonlinear wave processes. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998.
- [6] Robert Stephany and Christopher Earls. Weak-pde-learn: A weak form based approach to discovering pdes from noisy, limited data. *Journal of Computational Physics*, 506: 112950, June 2024. ISSN 0021-9991. 10.1016/j.jcp.2024.112950.

[7] Yaxiong Ren, Christian Adams, and Tobias Melz. Uncertainty analysis and experimental validation of identifying the governing equation of an oscillator using sparse regression. *Applied Sciences*, 12(2):747, January 2022. ISSN 2076-3417. 10.3390/app12020747.



ČESKÁ AKUSTICKÁ SPOLEČNOST

CZECH ACOUSTICAL SOCIETY

Tartiniho tóny a čtyři desetiletí objektivní diagnostiky poruch sluchu

Václav Vencovský

ČVUT FEL, Technická 2, 16627 Praha 6

vaclav.vencovsky@gmail.com

Abstract

Guiseppe Tartini was the first person who reported on the perception of additional tones to those that were presented into the ear by musical instrument(s). Many years later, David Kemp was the first who measured such additional tones by a microphone presented into the ear canal. The microphone recorded a tone (distortion product) that was evoked by two pure tones of nearby frequencies. These distortion products were later called distortion-product otoacoustic emissions (DPOAEs). Although Tartini tones and DPOAEs have the same origin in the inner ear, they do not behave similarly if we change the frequency ratio between tones because the source of distortion is distributed and evokes many wavelets that interact differently in the direction out of the cochlea and in the direction toward the tonotopic place for the distortion product. Reflection from the tonotopic place also complicates the accuracy of DPOAEs for diagnostic purposes. To summarize, there is still a lot of work that needs to be done, but there is hope that DPOAEs will not only serve as screening but provide more information about the function of the inner ear.

1 ÚVOD

Italský houslista a skladatel Giuseppe Tartini (1692-1770) ve své eseji *Trattato di musica secondo la vera scienza dellarmonia* z roku 1754 popsal existenci tzv. třetího tónu, který poprvé pozoroval v roce 1713. Tento tón může posluchač vnímat, pokud slyší dvojici tónů o blízké frekvenci, ať už hraných jedním nebo více nástroji. Tartinit ukázal, že tento tón má k dvojici hraných tónů přesný aritmetický vztah. Obdobné pozorování bylo učiněno také francouzským skladatelem a hudebním teoretikem Jean-Baptistem Rameauem (1683–1764) kolem roku 1742 a německým varhaníkem Georgem Andreasem Sorgem (1703–1778) kolem roku 1745. Protože Tartini byl původním objevitelem a navíc tóny podrobněji prozkoumal, nesou jeho jméno [1, 2].

Označíme-li frekvenci spodního tónu jako f_1 a horního jako f_2 , tedy $f_2 > f_1$, pak Tartiniho třetí tón měl v závislosti na intervalu f_2/f_1 obvykle frekvenci $2f_1 - f_2$ nebo $3f_1 - 2f_2$. Vnímatelné jsou však i tóny o frekvenci $f_2 - f_1$ [3]. Jaký je mechanismus vzniku těchto tónů? Celkem s jistotou se dá říci, že je to mechanismus nelineárního zkreslení. K tomu zkreslení může docházet přímo v hudebním nástroji [4] nebo, což vysvětluje případy vzniku Tartiniho tónů při hraní dvou odlišných not dvěma hudebními nástroji, v lidském sluchovém ústrojí. Konkrétně ve vnitřním uchu, ve kterém dochází k mechanoelektrické přeměně.

A skutečně existence distorzních produktů, které vznikají ve vnitřním uchu, byla prezentována Davidem Kempem v roce 1979 [5]. Tyto zvuky později dostaly souhrnný název otoakustické emise. Tento název se používá na všechny zvuky vznikající ve vnitřním uchu, které můžeme měřit mikrofonem ve zvukovodu. Nelineární zkreslení je jedním ze dvou známých mechanismů vzniku emisí, druhým mechanismem je lineární odraz na neregularitách v impedanci uvnitř vnitřního ucha [6]. Ihned po objevení otoakustických emisí bylo ukázáno, že při poškození sluchového systému nejsou emise měřitelné nebo je jejich amplituda daleko menší. To otevřelo cestu ke klinickému využití a v současné době se emise rutině využívají k objektivnímu screeningu stavu sluchu novorozenců [7]. Tento příspěvek využívá teoretický model vnitřního ucha pro studium vztahu mezi Tartiniho tóny a distorzním produktem měřitelným ve zvukovodu.

2 CO JE V UCHU NELINEÁRNÍ?

V tomto textu se přidržíme hypotézy, že hlavním zdrojem distorzních produktů ve vnitřním uchu je basilární membrána (BM). Pokud si vnitřní ucho, kterému u živorodých savců říkáme hlemyžď (kochlea) rozvineme, můžeme jej znázornit jako dva dukty vyplněné tekutinou, které BM rozděluje podélně. Vibrace třmínku způsobí vznik postupné vlny na BM, které říkáme postupná, protože její fáze se velmi pomalu mění o více než půl cyklu. BM má podél své délky proměnnou tuhost, která klesá od třmínku směrem ke konci BM. Tím je zajištěno, že postupná vlna dosahuje maxima vibrací v místě podél BM v závislosti na její frekvenci a dále již nepostupuje. Vysoké frekvence excitují více BM v blízkosti třmínku a nízké směrem k jejímu konci. Georg von Békésy, který experimentálně prokázal existenci postupné vlny na BM, předpokládal, že odezva je pasivní [8]. Ale již zhruba deset let po udělení Nobelovy ceny Békésymu za jeho příspěvek bylo zjištěno, že u živých zvířat je odezva při vyšších intenzitách nelineární [9].

Co je zdrojem nelineární odezvy BM? Experimentální studie ukázaly, že kmity na BM jsou aktivně zesilovány a toto zesílení je pro vyšší intenzity omezeno [10]. Proto je odezva nelineární. Zdá se, že dominantní nelinearitou v tomto procesu je alespoň v oblasti středních intenzit (do cca 80 dB hladiny ak. tlaku) nelinearita v procesu mechanoelektrické přeměny ve vnějších vláskových buňkách [11]. Konkrétně pravděpodobnost otevírání iontových kanálů pro draslík. O vnějších vláskových buňkách je známo, že při změně jejich receptorového potenciálu dochází ke změně jejich délky (jev nazvaný elektromotilita) [12]. Tato změna délky je považována za hlavní zdroj síly, která ve svém důsledku vede k zesílení kmitů na BM a uvažuje se, že je hlavní příčinou dosažení extrémně nízké citlivosti a extrémně vysoké frekvenční selektivity sluchu. Při prahu sluchu jsme schopni vnímat výchylky bubínku o velikosti srovnatelné s průměrem atomu vodíku.

3 TEORETICKÝ MODEL

Pro analýzu vzniku kombinačních distorzních produktů na BM je vytvořen model, který uvažuje BM jako řadu oscilátorů s postupně klesající tuhostí ve směru od oválného okénka (báze, x = 0) k apexu ($x = L_{\rm BM}$). Tento model je podrobně popsán v práci [13]. Transversální výchylka BM, $\xi(x,t)$, v čase t je dána rovnicí

$$m(x)\partial_t^2\xi(x,t) + h(x)\partial_t\xi(x,t) + k(x)\xi(x,t) - [\partial_x s(x)\partial_x]\partial_t\xi(x,t)$$

$$+ \int_0^{L_{\rm BM}} G(x,\bar{x})\partial_t^2\xi(\bar{x},t)d\bar{x} = -U(x,t) - G_S(x)\partial_t^2\sigma(t),$$
(1)

kde symbol ∂ představuje derivaci a index proměnnou podle které se derivuje, m(x) je hmotnost, k(x) je tuhost, h(x) je tlumení, $G_S(x)$ představuje vazbu mezi třmínkem a bazilární membránou (BM), $\sigma(t)$ je výchylka třmínku, $\partial_x s(x) \partial_x$ popisuje vzájemné spojení sousedních oscilátorů způsobené smykovou viskozitou a $G(x, \bar{x})$ vyjadřuje vzájemné spojení všech oscilátorů vyvolané hydrodynamickými silami od okolní tekutiny. U(x, t) je síla působící proti viskóznímu tlumení

$$U(x,t) = u(x)S[a\eta(x,t)],$$
(2)

kde S představuje Boltzmannovu funkci druhého řádu (Obrázek 1), která modeluje pravděpodobnost otevření iontových kanálů ve vláscích vnějších vláskových buněk v závislosti na výchylce vlásků $\eta(x,t)$, u(x) je vhodně zvolená prostorová funkce, která ovlivňuje velikost zesílení podél BM a *a* je konstanta, která dělá argument Boltzmannovy funkce bezrozměrný. Vlásky OHC jsou spojeny s tektoriální membránou (TM) a model uvažuje, že toto spojení vytváří druhou řadu oscilátorů, které jsou naladěny blízko rezonanční frekvence BM. V práci [14] bylo odvozeno, že kombinací funkce druhé řady oscilátorů, mikromechaniky kochley a mechanoelektrické přeměny ve vnějších vláskových buňkách je možné fenomenologicky aproximovat funkci zesílení tak, že je přímo úměrná vzájemné výchylce vlásků $\eta(x,t)$, která je dána vztahem

$$\partial_t^2 \eta(x,t) + \gamma_{\rm TM}(x) \partial_t^2 \eta(x,t) + \omega_{\rm TM}^2(x) \eta(x,t) = -\partial_t^2 \xi(x,t), \qquad (3)$$

kde $\gamma_{\rm TM}$ je viskózní tlumení a $\omega_{\rm TM}(x)$ je rezonanční frekvence.

3.1 Analytické řešení pro distorzní produkty

Pro vyjádření řešení rovnic přejdeme do frekvenční domény a hledáme řešení na frekvenci $f_{\rm DP} = 2f_1 - f_2$, která odpovídá kubickému distorznímu produktu. Ačkoli se v této práci omezujeme na kubický distorzní produkt, prezentované výsledky hrubě platí také pro rozdílový produkt $f_2 - f_1$. Protože je model nelineární, hledáme řešení jako součet zkrácené Fourierovy řady na násobích základní frekvence ω_0 zvolené tak, aby frekvence budících tón
ů f_1 a f_2 byly její celočíselné násobky n_1 a n_2 . Detaily ohledně odvození jsou v pracích [13, 15]. Stacionární řešení rovnice 1 na frekvenci $n_{\rm DP} = 2n_1 - n_2$ má tvar



Obrázek 1: Boltzmannova funkce druhého řádu použitá jako jediný zdroj nelinearity v modelu.

$$\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}(x) = -\frac{\hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(x)}{\hat{H}_{n_{\rm DP}}(x)} + Q_{n_{\rm DP}} \int_{0}^{L_{\rm BM}} \hat{K}_{n_{\rm DP}}(x,\bar{x}) \hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{4}$$

kde $K_{n_{\text{DP}}}(x, \bar{x})$ je Greenova funkce pro tento okrajový problém a je dána vztahem

$$\hat{K}_{n_{\rm DP}}(x,\bar{x}) = \frac{1}{\hat{W}} \begin{cases} \xi_{n_{\rm DP}}^{(1)}(x)\xi_{n_{\rm DP}}^{(2)}(\bar{x}) & 0 \le x \le \bar{x} \\ \hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(1)}(\bar{x})\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(2)}(x) & \bar{x} \le x \le L_{\rm BM}, \end{cases}$$
(5)

kde \hat{W} je Wronskian [15], a $\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(1)}$ a $\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(2)}$ jsou dvě lineárně nezávislá homogenní řešení splňující okrajové podmínky v bodech x = 0 a $x = L_{\rm BM}$, respektive. Nelineární síla $\hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(x)$ je dána vztahem:

$$\hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(x) = u(x) \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S\left[\sum_{n=-N}^N \hat{H}_n^{\rm TM}(x) \hat{\xi}_n(x) e^{in\omega_0 t}\right] e^{-in_{\rm DP}\omega_0 t} dt \qquad (6)$$
$$-u(x) \hat{H}_{n_{\rm DP}}^{\rm TM}(x) \hat{\xi}_{n_{\rm DP}}(x),$$

kde $H_{n_{\rm DP}}^{\rm TM}(x)$ je přenosová funkce vých
ylky BM na výchylku vlásků vnějších vláškových buněk.

Řešení $\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(1)}$ lze vyjádřit jako superpozici dvou vl
n putujících opačnými směry

$$\xi_{n_{\rm DP}}^{(1)}(x) = \hat{a} \left[A_{n_{\rm DP}}^B(x) e^{i\varphi_{n_{\rm DP}}^B(x)} + \hat{R}_{\rm st} A_{n_{\rm DP}}^F(x) e^{-i\varphi_{n_{\rm DP}}^F(x)} \right],\tag{7}$$

kde \hat{R}_{st} představuje koeficient odrazu třmínku z pohledu vnitřního ucha, \hat{a} je komplexní konstanta určená okrajovou podmínkou v x = 0 a $A_i(x)$ a $\varphi_i(x)$ odpovídají amplitudám a fázím vln. Řešení $\hat{u}n DP^2$ je aproximováno jednou vlnou putující od báze k apexu kochley

$$\hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(2)}(x) = \hat{b}A_{n_{\rm DP}}^F(x)e^{-i\varphi_{n_{\rm DP}}^F(x)},\tag{8}$$

kde \hat{b} je komplexní konstanta určená okrajovou podmínkou v $x = L_{BM}$.

Tlak, který naměříme mikrofonem ve zvukovodu jako nelineární složku DPOAE, $\hat{P}_{n_{\rm DP}},$ je úměrný

$$\hat{P}_{n_{\rm DP}} \propto \hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(1)}(0) \frac{Q_{n_{\rm DP}}}{\hat{W}} \Bigg[\int_{x_1}^{x_2} \hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(2)}(\bar{x}) \hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(\bar{x}) d\bar{x} \Bigg], \tag{9}$$

kde x_1 a x_2 vymezují oblast, kde spolu postupné vlny pro f_1 a f_2 tóny nejvíce interagují a generují distorzní produkty.

Oproti tomu ve směru k tonotopickému místu pro distorzní produkt $f_{\rm DP}=2f_1-f_2$ bude amplituda distorzního produktu vedoucí k jeho vjemu úměrná

$$\hat{P}_{n_{\rm DP}}^F \propto \int_{x_1}^{x_2} \hat{\xi}_{n_{\rm DP}}^{(1)}(\bar{x}) \hat{U}_{n_{\rm DP}}^{\rm NL}(\bar{x}) d\bar{x}.$$
(10)

Oba vztahy se liší v bázové funkci, což má velký důsledek pro sčítání jednotlivých komponent generovaných na intervalu mezi x_1 a x_2 [16]. Toto se projeví zejména v závislosti amplitudy měřené DPOAE a hlasitosti vnímaného distorzního produktu na poměru frekvencí f_2/f_1 . Obdobný výsledek byl pomocí jiného způsobu řešení prezentován v práci [17]. Řešení nám také vysvětlují, proč distorzní produkty mají obvykle menší frekvenci než f_1 . Bázové funkce pro produkty o vyšších frekvencích kvůli tonotopickému uspořádání obvykle zanikají blíže třmínku než je generační oblast v místě překryvu postupných vln pro f_1 a f_2 tony. Takový distorzní produkt se nemůže vyzářit ven z vnitřního ucha, přestože na BM vzniká [10].

Obrázek 2 ukazuje amplitudu a fázi DPOAE simulovanou numericky v modelu a amplitudu a fázi maxima výchylky na BM pro frekvenci distorzního



Obrázek 2: Numerická simulace ukazující pro $f_2 = 2.4 \text{ kHz}$, $L_1 = 55 \text{ dB}$ a $L_2 = 50 \text{ dB}$ hladiny ak. tlaku amplitudu a fázi DPOAE a také amplitudu a fázi postupné vlny (relativně k maximu).

produktu. Zobrazená data jsou funkcí poměru f_2/f_1 . Z obrázku vidíme, že DPOAE klesá více pro f_2/f_1 jdoucí k jedné, což je důsledkem destruktivní interference mezi distorzním produktem generovaným na určitém úseku BM. Jak je překryv mezi postupnými vlnami větší pro menší poměry frekvencí, rozšiřuje se generační oblast. Tento výsledek simulace je v souladu s experimentálními daty [18]. Stejně tak je v souladu s experimentálními daty daleko menší pokles pro vjem distorzních produktů, kde se obecně uvádí, že pro kubický produkt vjem postupně klesá s rostoucím poměrem frekvencí nad cca 1.15 [19]. Malý pokles s klesajícím poměrem k jedné je v simulaci možné vysvětlit také jevem zvaným two-tone suppression, kdy tóny o blízké frekvenci mohou vzájemně potlačovat svoji amplitudu [20]. To se děje jednak mezi postupnými vlnami pro f_1 a f_2 tóny a také, kvůli vyšší amplitudě, zcela jistě postupná vlna pro f_1 tón potlačuje postupnou vlnu distorzního produktu.

4 DPOAE VÍCE NEŽ JEN SCREENING

Přestože se DPOAE jako jeden z typů otoakustických emisí rutině používají, v naprosté většině případů se jedná o tzv. screening, kdy je cílem zjistit, jestli je sluch v pořádku a nebo jestli tam může být nějaká větší vada. DPOAE mají však potenciál přímo objektivně predikovat práh sluchu [21]. Přesnost této predikce ovlivňuje jev, kdy právě od postupné vlny z tonotopického místa dochází ke generaci další otoakustické emise, která má velmi odlišnou fázovou charakteristiku a vzniká kvůli odrazu části energie postupné vlny distorzního produktu. Existence silného Tartiniho tónu ve smyslu postupné vlny pro distorzní produkt nám zde tedy komplikuje přesnost měření. Naštěstí existují způsoby, jak tento sekundární produkt k DPOAE odstranit, ačkoli se v komerčních přístrojích často nepoužívají. Stejně tak se samotné měření obvykle omezuje na měření na jedné intenzitě, ale pro práh sluchu je nutné měřit růst otoakustické emise [21].

5 ZÁVĚR

Zdravý sluchový systém je silně nelineární. Nelineární je již mechanoelektrický převod ve vnitřním uchu, při kterém dochází k mechanickému zesilování vibrací. Toto zesílení je nezbytné k dosažení výjimečně velké citlivosti sluchového systému a také pro vysokou frekvenční selektivitu. Nelineární odezva však generuje zkreslení, konkrétně distorzní produkty, které jsme nejen schopni vnímat, ale také je již čtyři desetiletí využíváme pro objektivní hodnocení funkce sluchového systému. Stále většinou pouze jako screening. Kombinací teoretického modelování a experimentů lze však možnosti využití Tartiniho tónů v budoucnu zlepšit.

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena projektem 23-07621J Grantové agentury České republiky (GAČR) "Otoakustické emise v normální kochlee a při přetlaku v endolymfatickém prostoru kochley: modelování a experimenty"

REFERENCE

- Jones, A. T., The Discovery of Difference Tones, Am. J. Phys. 3(2), 49–51 (1935), doi: 10.1119/1.1992920.
- [2] Caselli, G., Masetti, G., and Cecchi, G., Tartini, the third tone and the cochlea, (Music and Physiology), (2018).
- [3] Plomp, R., Detectability Threshold for Combination Tones, J. Acoust. Soc. Am. 37, 1110–1123 (1965), doi: 10.1121/1.1909532.
- [4] Caselli, G., Cecchi, G., and Masetti, G., Characteristics, mechanisms, and perceivability of combination tones in violins, J. Acoust. Soc. Am. 152, 2513–2523 (2022), doi: 10.1121/10.0014600.
- [5] Kemp, D. T., Evidence of mechanical nonlinearity and frequency selective wave amplification in the cochlea, Arch. Oto-Rhino-Laryngol. 224, 37–45 (1979), doi: 10.1007/BF00455222.
- [6] Shera, C. A., and Guinan, J. J., Evoked otoacoustic emissions arise by two fundamentally different mechanisms: A taxonomy for mammalian OAEs, J. Acoust. Soc. Am. 105, 782– 798 (1999), doi: 10.1121/1.426948.

- [7] Lonsbury-Martin, B., L., Martin, G., K.: The Clinical Utility of Distortion-Product Otoacoustic Emissions. *Ear and Hearing* 11(2), 144–154, 1990.
- [8] Von Békésy, G., *Experiments in hearing*, Mcgraw Hill, Oxford, England, (1960).
- [9] Rhode, W. S., Observations of the vibration of the basilar membrane in squirrel monkeys using the Mössbauer technique, J. Acoust. Soc. Am. 49, 1218–1231 (1971), doi: 10.1121/1.1912485.
- [10] Robles, L., and Ruggero, M. A., Mechanics of the Mammalian Cochlea, *Physiol. Rev.* 81, 1305–1352 (2001), doi: 10.1152/physrev.2001.81.3.1305.
- [11] Santos-Sacchi, J., Harmonics of outer hair cell motility, *Biophys. J.* 65, 2217–2227 (1993), doi: 10.1016/S0006-3495(93)81247-5.
- [12] Brownell, W. E., What Is Electromotility? The History of Its Discovery and Its Relevance to Acoustics, Acoust. Today 13(1), 20–27 (2017), PMID: 29051713, PMCID: PMC5645053.
- [13] Vencovský, V., Zelle, D., Dalhoff, E., Gummer, A. W., and Vetešník, A., The influence of distributed source regions in the formation of the nonlinear distortion component of cubic distortion-product otoacoustic emissions, J. Acoust. Soc. Am. 145, 2909–2931 (2019), doi: 10.1121/1.5100632.
- [14] Nobili, R., and Mammano, F., Biophysics of the cochlea. II: Stationary nonlinear phenomenology, J. Acoust. Soc. Am. 99, 2244–2255 (1996), doi: 10.1121/1.415412.
- [15] Vetešník, A., and Gummer, A. W., Transmission of cochlear distortion products as slow waves: A comparison of experimental and model data, J. Acoust. Soc. Am. 131, 3914– 3934 (2012), doi: 10.1121/1.3699207.
- [16] Vetešník, A., Vencovský, V., and Gummer, A. W., An additional source of distortionproduct otoacoustic emissions from perturbation of nonlinear force by reflection from inhomogeneities, J. Acoust. Soc. Am. 152, 1660–1682 (2022), doi: 10.1121/10.0013992.
- [17] Shera, C. A., and Guinan, J. J., Mechanisms of Mammalian Otoacoustic Emission, in Active Processes and Otoacoustic Emissions in Hearing, edited by G. A. Manley, R. R. Fay, and A. N. Popper, (Springer Handbook of Auditory Research, Vol. 30, Springer, New York, NY, 2008), doi: 10.1007/978-0-387-71469-1_9.
- [18] Brown, A. M., and Gaskill, S. A., Measurement of acoustic distortion reveals underlying similarities between human and rodent mechanical responses, J. Acoust. Soc. Am. 88, 840–849 (1990), doi: 10.1121/1.399733.
- [19] Weber, R., and Mellert, V., On the nonmonotonic behavior of cubic distortion products in the human ear, J. Acoust. Soc. Am. 57(1), 207–214 (1975), doi: 10.1121/1.380416.
- [20] Ruggero, M. A., Robles, L., and Rich, N. C., Two-tone suppression in the basilar membrane of the cochlea: mechanical basis of auditory-nerve rate suppression, *J. Neurophysiol.* 68, 1087–1099 (1992), doi: 10.1152/jn.1992.68.4.1087.
- [21] Janssen, T., Kummer, P., and Arnold, W., Growth behavior of the 2f₁ f₂ distortion product otoacoustic emission in tinnitus, J. Acoust. Soc. Am. 103(6), 3418–3430 (1998), doi: 10.1121/1.423053, PMID: 9637029.

